

Lógica – Grado en Ingeniería Informática, Grado en Matemáticas e Informática

26 de octubre de 2015

Examen de Lógica Proposicional

Ejercicio 1.1. Dadas las siguientes fórmulas, decir para cada una de ellas si es válida, contingente, contradicción o no es posible saber con certeza qué es, a partir de la información disponible sobre A, B y C (donde A, B y C son fórmulas bien formadas cualesquiera): (0,5 puntos)

	<u>sabiendo que</u>	<u>respuesta</u>
$A \vee \neg B$	B es insatisfacible, A es una contradicción	VÁLIDA
$(C \vee B) \rightarrow (C \vee A)$	B es insatisfacible, C es contingente	VÁLIDA
$\neg(A \vee \neg B) \wedge (C \rightarrow B)$	B es válida, A es insatisfacible	VÁLIDA
$\neg A \wedge (A \rightarrow (B \vee \neg A))$	A es válida, B es insatisfacible	CONTRADICCIÓN
$A \wedge (C \rightarrow (B \vee \neg A))$	A es contingente, todo modelo de A es modelo de C	NO SE SABE

Ejercicio 1.2. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Para las que sean verdaderas decir por qué, y para las que sean falsas escribir la correspondiente definición o teorema. (2 puntos)

Si $T[A1, A2, \dots, An] \vdash B$ es correcta entonces $T[A2, \dots, An, \neg B] \vdash \neg A1$ es correcta

VERDADERA

Si $T[A1, A2, \dots, An] \vdash B$ es correcta entonces $\{A1, A2, \dots, An, \neg B\}$ es insatisfacible. Como A1 es equivalente a $\neg \neg A1$, el conjunto $\{\neg \neg A1, A2, \dots, An, \neg B\}$ también sería insatisfacible. Si $\{\neg \neg A1, A2, \dots, An, \neg B\}$ es insatisfacible entonces $T[A2, \dots, An, \neg B] \vdash \neg A1$ es correcta.

Supongamos que $T[A2, \dots, An, \neg B] \vdash \neg A1$ NO es correcta. En ese caso, el conjunto $\{A2, \dots, An, \neg B, \neg \neg A1\}$ sería satisfacible, es decir, habría al menos una interpretación que haría verdaderas a A1, A2, ..., An y $\neg B$ (porque A1 es equivalente a $\neg \neg A1$). Pero esto no es posible ya que $T[A1, A2, \dots, An] \vdash B$ es correcta, y

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Una fórmula es contingente si tiene al menos un contramodelo y un modelo.

La fórmula $(p \vee q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \vee (q \rightarrow r))$ es una tautología

FALSA

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q \rightarrow r)$	$q \rightarrow r$	$(p \vee (q \rightarrow r))$	$(p \vee q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \vee (q \rightarrow r))$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	F
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V

Como hay dos interpretaciones que hacen a la fórmula falsa, no es una tautología.

Si $A1 \wedge A2 \wedge \dots \wedge An \wedge \neg B$ es insatisfacible, podemos afirmar que B es consecuencia lógica de $A1, A2, \dots, An$

VERDADERA

Si $A1 \wedge A2 \wedge \dots \wedge An \wedge \neg B$ es insatisfacible entonces $T[A1, A2, \dots, An] \vdash B$ es correcta. Como el cálculo deductivo basado en deducción natural es correcto y completo para la lógica proposicional, esto significa que $T[A1, A2, \dots, An] \models B$, es decir, que B es consecuencia lógica de $A1, A2, \dots, An$.

Si B no fuera consecuencia lógica de $A1, A2, \dots, An$ entonces existiría al menos una interpretación que haría verdaderas a $A1, A2, \dots, An$ y falsa a B . Esa interpretación haría verdadera a la fórmula $A1 \wedge A2 \wedge \dots \wedge An \wedge \neg B$, pero esto no es posible ya que dicha fórmula es insatisfacible. Por tanto, B tiene que ser consecuencia lógica de $A1, A2, \dots, An$.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Ejercicio 2. Formalizar en el lenguaje de la lógica proposicional

(1,5 puntos)

a. el siguiente *enunciado*:

- Jugaremos al baloncesto sólo si somos al menos 6 amigos y el árbitro se presenta o manda un sustituto.

b. y la siguiente *argumentación*:

- No aprenderé a bailar salsa si no voy a clases de baile o tengo ascendencia latina. No ligaré con chicos a menos que sepa bailar salsa y me ponga mis mejores galas. He ligado, aunque no me he puesto de gala. Por tanto, he ido a clases de baile.

a)

- p: Jugaremos al baloncesto
- p: Somos al menos 6 amigos
- r: El árbitro se presenta
- s: Manda un sustituto
- $p \rightarrow q \wedge (r \vee s)$

b)

- p: Aprenderé a bailar salsa
- q: Voy a clases de baile
- r: Tengo ascendencia latina
- s: Ligaré con chicos
- t: Ponerme mis mejores galas
- No aprenderé a bailar salsa si no voy a clases de baile o tengo ascendencia latina.
 - $\neg q \vee r \rightarrow \neg p$
- No ligaré con chicos a menos que sepa bailar salsa y me ponga mis mejores galas.
 - Saber bailar salsa y ponerse las mejores galas es condición necesaria para

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

- q

Cartagena99

Ejercicio 3. Comprobar si hay consecuencia lógica con medios semánticos distintos a la tabla de verdad (NO son válidos: el uso de deducción natural, resolución, transformar las formulas por equivalencias, o tablas de verdad).

$$\{ (p \rightarrow q) \rightarrow q \vee r, r \vee p \rightarrow t \wedge q, \neg t \wedge s \} \models s \rightarrow r$$

(2 puntos)

*) Búsqueda de contramodelo:

1. $i(A3)=i(\neg t \wedge s)=V$ sii $i(t)=F$ y $i(s)=V$

2. $i(B)=i(s \rightarrow r)=F$ sii $i(s)=V$ y $i(r)=F$

(llegados a este punto, es trivial evaluar A2 y ver que sólo pueden tener interpretación verdadera con $i(p)=F$, y con esto, evaluar A1 y ver que sólo puede tener interpretación verdadera con $i(q)=V$)

3. $i(A1)=i((p \rightarrow q) \rightarrow q \vee r)=V$ sii $i(p \rightarrow q)=F$ o $i(q \vee r)=V$,

a. o bien, $i(p \rightarrow q)=F$ sii $i(p)=V$ y $i(q)=F$

b. o bien, $i(q \vee r)=V$ sii $i(q)=V$ o $i(r)=V$,

c. Como hemos dicho en el punto 2 que $i(r)=F$, tenemos que $i(A1)=V$ sii $i(q)=V$ o ($i(p)=V$ y $i(q)=F$).

4. $i(A2)=V$ sii

a. O bien, $i(r \vee p)=F$

i. $i(r \vee p)=F$ sii $i(r)=F$ y $i(p)=F$. Lo cual es compatible con 1 y 2.

b. O bien, $i(t \wedge q)=V$

i. $i(t \wedge q)=V$ sii $i(t)=V$ y $i(q)=V$. Lo cual no es posible por el punto 1.

ii. Por lo tanto, $i(r \vee p)=F$ en 4.a y $i(p)=F$; y, por lo tanto $i(q)=V$ en 3.c

Conclusión: No hay consecuencia lógica, como muestra el siguiente contramodelo:

$$i(p)=F, i(q)=V, i(r)=F, i(s)=V, i(t)=F$$

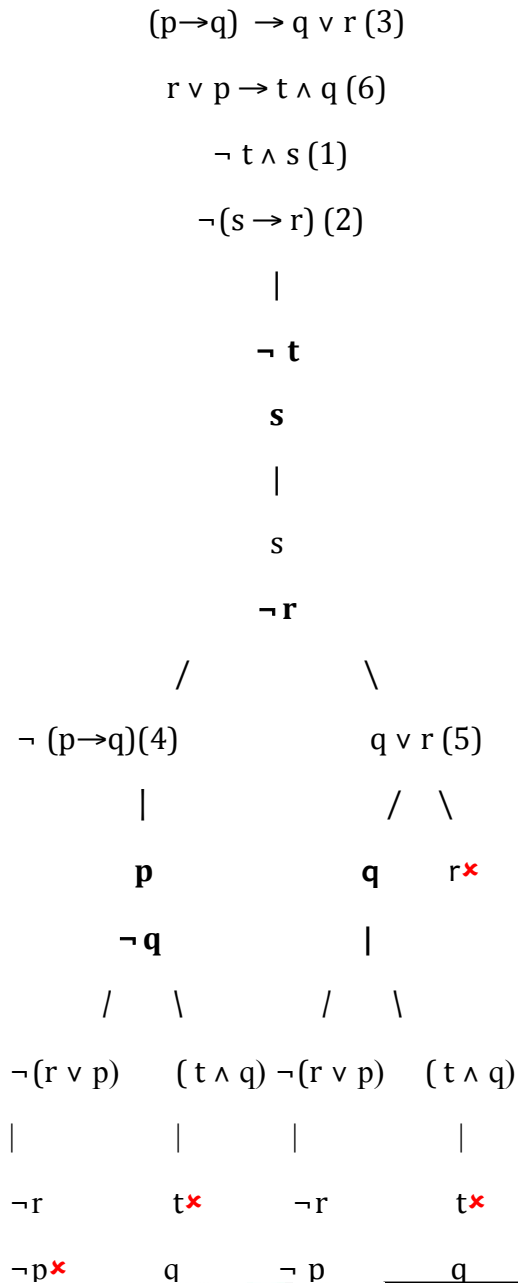
The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue background with a white arrow pointing to the right, and a yellow and orange gradient bar at the bottom.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

*) Tableau:

El tableau tiene ramas abiertas, no hay consecuencia lógica. La rama abierta marca el contramodelo: $i(p)=F, i(q)=V, i(r)=F, i(s)=V, i(t)=F$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



Ejercicio 4. Demostrar con el cálculo **deducción natural** (y por tanto **sin utilizar** tablas de verdad, ni razonamientos semánticos **ni** el método de resolución) :

$$p \wedge q \rightarrow r \vee s \quad \vdash \quad (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s) \quad (2 \text{ puntos})$$

*) 1ª solución:

1-	$(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$	premisa
2-	$\neg((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s))$	supuesto
3-	$\neg(p \rightarrow r) \wedge \neg(q \rightarrow s)$	th intercambio 2 con $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
4-	$\neg(p \rightarrow r)$	elim \wedge 3
5-	$\neg(q \rightarrow s)$	elim \wedge 3
6-	$\neg(\neg p \vee r)$	th intercambio 4 con $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
7-	$p \wedge \neg r$	th intercambio 6 con $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ y $\neg\neg A \equiv A$
8-	$\neg(\neg q \vee s)$	th intercambio 5 con $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
9-	$q \wedge \neg s$	th intercambio 8 con $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ y $\neg\neg A \equiv A$
10-	p	elim \wedge 7
11-	q	elim \wedge 9
12-	$p \wedge q$	int \wedge 10, 11
13-	$r \vee s$	modus ponens 12, 1
14-	$\neg r$	elim \wedge 7
15-	$\neg s$	elim \wedge 9
16-	$\neg r \wedge \neg s$	int \wedge 14, 15
17-	$\neg(r \vee s)$	th intercambio 16 con $\neg A \wedge \neg B \equiv \neg(A \vee B)$
18-	$\neg\neg((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s))$	int \neg 2, 13, 17
19-	$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s)$	elim \neg 18



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Intercambio 5 con $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$, dos veces

Ejercicio 5. Demostrar que la siguiente estructura deductiva es correcta usando el método de resolución: (2 puntos)

$$\top [t \rightarrow p, r \vee \neg r \rightarrow s, \neg((p \wedge s) \vee q)] \vdash \neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \vee q) \wedge \neg(t \vee \neg s)$$

*) Transformar a forma clausular:

A1. $t \rightarrow p \equiv$ (eliminación de \rightarrow) $\neg t \vee p$ (clausula 1)

A2. $r \vee \neg r \rightarrow s \equiv$ (eliminación de \rightarrow) $\neg(r \vee \neg r) \vee s \equiv$ (DeMorgan)

$(\neg\neg r \wedge \neg r) \vee s \equiv$ (elim $\neg\neg$) $(r \wedge \neg r) \vee s \equiv$ (distributividad)

$(\neg r \vee s) \wedge (r \vee s)$ (clausulas 2 y 3)

A3. $\neg((p \wedge s) \vee q) \equiv \neg(p \wedge s) \wedge \neg q \equiv$ (DeMorgan)

$(\neg p \vee \neg s) \wedge \neg q$ (clausulas 4 y 5)

-C. $\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \vee q) \wedge \neg(t \vee \neg s)) \equiv$ (eliminación de \rightarrow)

$\neg(\neg(\neg p \vee \neg q) \vee (\neg(p \vee q) \wedge \neg(t \vee \neg s))) \equiv$ (DeMorgan)

$\neg\neg(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg(\neg(p \vee q) \wedge \neg(t \vee \neg s)) \equiv$ (elim $\neg\neg$)

$(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg(\neg(p \vee q) \wedge \neg(t \vee \neg s)) \equiv$ (DeMorgan)

$(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg\neg(p \vee q) \vee \neg\neg(t \vee \neg s)) \equiv$ (elim $\neg\neg$)

$(\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q \vee t \vee \neg s)$ (clausulas 6 y 7)

*) Resolución:

C1. $\neg t \vee p$

C2. $\neg r \vee s$

C3. $r \vee s$

C4. $\neg p \vee \neg q$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

C8. $p \vee t \vee \neg s$ desde C7 con C5 (corte)

C9. $p \vee t \vee \neg s$ desde C8 con C1 (corte)



C10. pv \rightarrow s desde C9 (idempotencia)

C11. \rightarrow sv \rightarrow s desde C10 con C4 (corte)

C12. \rightarrow s desde C11(idempotencia)

C13. s v s desde C2 con C3 (corte)

C14. s desde C13(idempotencia)

C15. \square desde C12 con C14 (corte)

The logo for 'Cartagena99' features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue background with a white arrow pointing to the right, and a yellow shadow effect at the bottom.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70