Ecuaciones de Maxwell

Ecuaciones de Maxwell. Campos EM variables en el tiempo.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Lenz-Faraday

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_l$$

Gauss

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Ampere-Maxwell

Densidad de corriente de Desplazamiento

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

¿∃Monopolos magnéticos?

Principio de conservación de carga

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

Ecuaciones de Maxwell. Problemas de compatibilidad

En un principio se tenía: $$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}$$

Pero esta expresión, entraba en conflicto con la ecuación $$\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

Ecuación de continuidad o de conservación de la carga

Esto llevó a Maxwell a incluir el término que se mostrará tan decisivo.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Densidad de corriente de Desplazamiento

¡Nueva relación entre campos eléctricos y magnéticos!

Ecuaciones de Maxwell. Campos EM variables en el tiempo.

$$\nabla \cdot \overrightarrow{D} = \rho_l$$

•La fuente del campos eléctrico son las densidades de carga eléctrica

•Las lineas de campo no son cerradas

$$\nabla \times \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$$

•Campos magnéticos variables en el tiempo, dan lugar a un rotacional de campo electrico, es decir a una circulación del mismo sobre una trayectoria

•El campos eléctrico en régimen dinámico (no estático) NO es un campos conservativo

Ecuaciones de Maxwell. Campos EM variables en el tiempo.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

- La aparición de no uniformidades en el campo magnético (rotacional de H) serán debidas a dos causas:
  - Corrientes
  - Variación temporal del campo eléctrico

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

- No existen monopolos magnéticos. No hay sumideros o fuentes. Las líneas de campo magnético son cerradas

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Potencial magnético vector

Potencial vector magnético.

- Potencial vector magnético
  - Permite el cálculo del campo magnético a partir de las corrientes
  - Simplifica problemas de radiación
  - Se completa la definición especificando su divergencia: div A=0 (Condición de Coulomb)
  - En magnetostática esta condición conduce a la ecuación vectorial de Poisson:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

Cuya solución general de manera análoga al potencial escalar V, es:

$$\vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\vec{J}(r')}{|r - r'|} dv$$

Universidad Rey Juan Carlos

Ecuación de Helmholtz

Ecuación de Helmholtz para potenciales escalares y vectoriales

$$\nabla^2 V + k^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}$$

$$\nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}$$

Ecuaciones de Maxwell. Forma fasorial

$$E(x,y,z,t) = E_0 \cos \omega t = \mathrm{Re}\left[E(x,y,z)\cdot e^{j\omega t}\right]$$

$$\rho(r,t) = \rho_0(r)\cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}\left[\rho_0(r)\cdot e^{j\varphi}\cdot e^{j\omega t}\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla \times \vec{E} = -j\mu\omega\vec{H} \\ &\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega\varepsilon\vec{E} \\ &\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon} \\ &\nabla \cdot \vec{H} = 0 \end{aligned}}$$

E y H son fasores vectoriales y ρ,J son fasores fuente

ECUACIONES DE MAXWELL. Consecuencias

- Son expresiones matemáticas de resultados experimentales
- Su aplicación a cualquier situación, SÍ puede verificarse
- Son las ecuaciones básicas que rigen el comportamiento de los campos electromagnéticos producidos por fuentes de carga y densidades de corrientes
- Se deducen de ellas las ecuaciones de propagación de las ondas electromagnéticas en un medio lineal

Ecuaciones de Maxwell --- Ondas

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = \nabla \times (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t})$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = \sigma(\nabla \times \vec{E}) + \varepsilon(\nabla \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = -\sigma\mu \frac{\partial H}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{H} - \sigma\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0}$$

Teniendo en cuenta que :

$D = \varepsilon E \qquad j = \sigma E$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

¡Ecuación de Ondas!

Ecuaciones de Maxwell --- Ondas

De forma análoga se puede realizar con el campo E, y llegar a las siguientes expresiones:

$$\boxed{\nabla^2 \vec{H} - \sigma\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0}$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} - \sigma\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0}$$