

Ejemplo de estimación del dominio de una inversa local

Consideramos el abierto $U_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ y la función $f : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} e^y + xy^2 \\ x^3 - x \log y \end{bmatrix}.$$

Dado el punto $a = (2, 1)$ y su imagen $b = f(a) = \begin{bmatrix} e + 2 \\ 8 \end{bmatrix}$, buscamos bolas $B(a, r_1) \subset U_0$ y $B(b, r_2)$ tales que f sea *regular e inyectiva* en $B(a, r_1)$ y la imagen $f(B(a, r_1))$ contenga a $B(b, r_2)$, con lo cual tendremos una inversa local

$$f^{-1} : B(b, r_2) \longrightarrow B(a, r_1) \subset \mathbb{R}^2,$$

de clase C^∞ . El propósito es hallar valores explícitos para r_1 y r_2 . Calculamos:

$$Df = \begin{bmatrix} y^2 & e^y + 2xy \\ 3x^2 - \log y & -x/y \end{bmatrix}.$$

Buscamos una matriz $P \in O(2)$ y números $r, \lambda > 0$ tales que:

$$\text{para todo } (x, y) \in B(a, r) \text{ y todo } v \in \mathbb{R}^2 \text{ es } v^t (Df_{(x,y)} P) v \geq \lambda \|v\|_2^2. \quad (1)$$

Conseguido eso, tendremos que f es regular e inyectiva en $B(a, r)$ y que $f(B(a, r)) \supseteq B(b, \lambda r)$.

En vista de que $Df_a = \begin{bmatrix} 1 & e + 2 \\ 12 & -2 \end{bmatrix}$ tiene bastante más grandes (y positivas) las entradas fuera de la diagonal, elegimos $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, con lo cual $(Df)P = \begin{bmatrix} e^y + 2xy & y^2 \\ -x/y & 3x^2 - \log y \end{bmatrix}$, y calculamos:

$$\begin{aligned} v^t (Df) P v &= (e^y + 2xy) v_1^2 + (3x^2 - \log y) v_2^2 + \left(y^2 - \frac{x}{y}\right) v_1 v_2 \geq \\ &\geq (e^y + 2xy) v_1^2 + (3x^2 - \log y) v_2^2 - \left| \left(y^2 - \frac{x}{y}\right) v_1 v_2 \right| \geq \\ &\geq \left(e^y + 2xy - \frac{1}{2} \left| y^2 - \frac{x}{y} \right| \right) v_1^2 + \left(3x^2 - \log y - \frac{1}{2} \left| y^2 - \frac{x}{y} \right| \right) v_2^2. \end{aligned}$$

Probemos a ver si para $r = 1/2$ existe un $\lambda > 0$ cumpliendo (1). Si $(x, y) \in B(a, 1/2)$, entonces:

$$\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} < y < \frac{3}{2}.$$

Haciendo uso de $e^t \geq t + 1$ y $\log t \leq t - 1$, deducimos que si $(x, y) \in B(a, 1/2)$ entonces:

$$\begin{aligned} e^y + 2xy &> e^{1/2} + (2) \left(\frac{3}{2}\right) \frac{1}{2} > \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3, \\ 3x^2 - \log y &> 3 \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \log \frac{3}{2} > \frac{27}{4} - \frac{1}{2} = \frac{25}{4} > 6, \\ \frac{1}{2} \left| y^2 - \frac{x}{y} \right| &< \frac{1}{2} \left| \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5/2}{1/2} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{4} - 5 \right| = \frac{19}{8}, \end{aligned}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99