

# Hoja 1 – Introducción al Cálculo de Probabilidades

1.- Dados el conjunto  $B \subset \Omega$  y las sucesiones  $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  y  $\{B_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ , se pide

(1.a) Demostrar la igualdad  $\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$ .

(1.b) Si  $A_n \downarrow$ , demostrar que existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$  y que  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ .

(1.c) Demostrar que  $\limsup A_n = \limsup A_{2n} \cup \limsup A_{2n-1}$  y  $\liminf A_n = \liminf A_{2n} \cap \liminf A_{2n-1}$ .

(1.d) Demostrar que  $\limsup(B - A_n) = B - \liminf A_n$  y  $\liminf(B - A_n) = B - \limsup A_n$ .

(1.e) Demostrar que  $(\limsup A_n)^c = \liminf A_n^c$  y  $(\liminf A_n)^c = \limsup A_n^c$ .

(1.f) Demostrar que  $\limsup(A_n \cup B_n) = \limsup A_n \cup \limsup B_n$  y  $\liminf(A_n \cap B_n) = \liminf A_n \cap \liminf B_n$ .

2.- Determinar los límites inferiores y superiores de  $\{A_n : n \geq 1\}$  cuando:

(2.a)  $A_{2n-1} = \mathbb{Q} \cap \left[\frac{1}{n}, \frac{5n}{2n+2}\right]$  y  $A_{2n} = (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap \left(-\frac{2}{n}, \frac{7n+3}{9n}\right]$ .

(2.b)  $A_{3n-2} = \left(\frac{n-1}{5n+3}, \frac{2n-1}{n}\right]$ ,  $A_{3n-1} = \left(\frac{3n}{5n+1}, \frac{3n+2}{n}\right)$  y  $A_{3n} = \left[1, \frac{2n^2+1}{n+2}\right)$ .

(2.c)  $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{n} \leq x \leq 3 - \frac{1}{n}\right\}$ .

3.- Supongamos  $\Omega = \mathbb{R}^2$ . Calcular los conjuntos  $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n^c$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n^c$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty}(E_n \cap F_n^c)$ , donde

$$E_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 + \frac{1}{n} \right\},$$

$$F_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{n}{n+1} \right\}.$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

The logo for Cartagena99, featuring the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font with a shadow effect, set against a light blue and orange background.

(4.a)  $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{n} \leq x^2 + y^2 \leq 4 - \frac{1}{n}\}$ .

(4.b)  $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq \frac{1}{n}\}$ .

5.- Estudiar la convergencia de la sucesión  $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  en los siguientes casos:

(5.a)  $A_n = (-\frac{1}{n}, 1]$  si  $n$  es par, y  $(-1, \frac{1}{n}]$  si  $n$  es impar.

(5.b)  $A_n = (0, 1 - \frac{1}{n}]$  si  $n$  es impar, y  $[\frac{1}{n}, 1)$  si  $n$  es par.

The logo for Cartagena99 features the word "Cartagena99" in a stylized, blue, serif font. The "99" is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue background with a white arrow pointing to the right, and a white shadow is cast beneath the text.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70