

Hoja 4 – Variables aleatorias multidimensionales

1.- Estudiar si

$$F(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x + 2y \geq 1, \\ 0, & \text{si } x + 2y < 1, \end{cases}$$

es una función de distribución en \mathbb{R}^2 .

2.- Dada la variable aleatoria 2-dimensional (X, Y) tal que

$$P(X = 1, Y = 0) = P(X = 0, Y = 1) = P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{3},$$

calcular la función de distribución conjunta de (X, Y) y las funciones de distribución marginales de X e Y .

3.- Sea (X, Y) una variable aleatoria 2-dimensional con distribución uniforme sobre el recinto

$$C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq \frac{x}{3}, x \leq 3, y \geq 0 \right\}.$$

Calcular la función de densidad conjunta de (X, Y) , la función de distribución conjunta de (X, Y) y las distribuciones marginales de X e Y .

4.- Dada la variable aleatoria 2-dimensional (X, Y) con función de densidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} 2^{-1} \text{sen}(x + y), & \text{si } 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

calcular:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

(4.b) La matriz de varianza-covarianzas de (X, Y) .

5.- Sea (X, Y) una variable aleatoria 2-dimensional con función de densidad $f(x, y) = 24y(1 - x - y)$ sobre el recinto $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$. Calcular:

(5.a) La función de distribución conjunta.

(5.b) Las funciones de densidad marginales.

(5.c) Las funciones de densidad condicionadas.

6.- Se sitúan de forma aleatoria e independiente N puntos en el intervalo $(0, T)$. Si X representa la distancia de 0 al primer punto e Y denota la distancia de 0 al segundo punto, entonces calcular la distribución conjunta y las correspondientes marginales de (X, Y) .

7.- La probabilidad de que desde un huevo nazca un insecto es p . En una flor, el número de huevos puestos por estos insectos sigue una distribución Poisson de media λ .

(7.a) Calcular la distribución del número de insectos que nace en una flor.

(7.b) Se ha observado una flor y se ha constatado que el número de insectos que han nacido en ella ha sido n . Calcular la distribución del número de huevos que había en la flor.

8.- Sea ξ una variable aleatoria discreta con función de masa

$$p(x) = \frac{1}{2^x}, \quad x = 1, 2, \dots$$

Supongamos que $\eta/\xi = x$ es una variable aleatoria con función de densidad

$$f(y/x) = x(1 - y)^{x-1}, \quad 0 < y < 1.$$

Determinar la distribución de η .

9.- Sea X una variable aleatoria con distribución Exponencial de parámetro $\lambda = 1$. Supongamos que $Y/X = x$ es una variable aleatoria con función de densidad

$$f(y/x) = \begin{cases} xy^{-(x+1)}, & \text{si } y > 1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Calcular:

(9.a) La función de densidad conjunta.

(9.b) La función de densidad marginal de Y .

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

10.- Se considera la variable aleatoria 2-dimensional (ξ, η) , donde ξ sigue una distribución Poisson de parámetro λ y $\eta/\xi = x$ sigue una distribución Normal de media $x^2 - 2x$ y varianza σ^2 . Calcular la esperanza de η y la matriz de varianzas-covarianzas.

11.- Calcular la matriz de varianzas-covarianzas de la variable aleatoria 2-dimensional con función característica

$$\phi(t, u) = \frac{9e^{3i(t+2u)-(t^2+4u^2)/2}}{(3-it)^2}.$$

12.- Se considera la variable aleatoria 2-dimensional (ξ, η) con función de masa

$$\begin{aligned} P(-1, -1) &= \frac{1}{16}, & P(-1, 0) &= \frac{3}{16}, & P(-1, 1) &= 0, \\ P(0, -1) &= \frac{1}{16}, & P(0, 0) &= \frac{1}{4}, & P(0, 1) &= \frac{3}{16}, \\ P(1, -1) &= \frac{1}{8}, & P(1, 0) &= \frac{1}{16}, & P(1, 1) &= \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Demostrar que $\phi_{\xi+\eta}(t) = \phi_{\xi}(t)\phi_{\eta}(t)$ y mostrar que, sin embargo, ξ y η no son independientes.

13.- Sea (X_1, X_2) una variable aleatoria 2-dimensional con función de densidad

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Se considera la transformación (Y_1, Y_2) , donde $Y_1 = \max\{X_1, X_2\}$ e $Y_2 = \min\{X_1, X_2\}$. Calcular la función de densidad de (Y_1, Y_2) .

14.- Sea (X, Y) una variable aleatoria 2-dimensional con función de densidad uniforme en el recinto

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Calcular las distribuciones de Z y (Z, T) , donde $Z = X + Y$ y $T = X - Y$.

15.- Sea (ξ_1, ξ_2) una variable aleatoria 2-dimensional con función de densidad

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy, & \text{si } 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Hallar la distribución conjunta de (η_1, η_2) , donde $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$ y $\eta_2 = \max\{\xi_1, \xi_2\}$.

16.- Se consideran las variables aleatorias X e Y independientes, donde $X \sim \text{Uniforme}(1, 3)$ e Y tiene función de densidad

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2^{-1}e^{2-y}, & \text{si } y > 2, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

(16.a) La distribución conjunta de (Z, W) , donde $Z = X/Y$ y $W = XY$.

(16.b) La distribución marginal de Z .

17.- Sean X_1, \dots, X_{n+1} variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una distribución Bernoulli de parámetro p . Sean

$$V_n = \prod_{i=1}^n X_i \quad \text{y} \quad V_{n+1} = \prod_{i=1}^{n+1} X_i.$$

Calcular la distribución conjunta de (V_n, V_{n+1}) , su función característica y deducir si V_n y V_{n+1} son o no independientes.

18.- Sean X e Y variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución Exponencial de parámetro $\lambda = 1$. Calcular la distribución de $T = |X - Y|$.

19.- Sea (ξ_1, ξ_2) una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 2^{-1}e^{-x_1}, & \text{si } x_1 > 0, -1 < x_2 < 1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Hallar la distribución de la variable aleatoria $\eta = |\xi_1 + \xi_2|$.

20.- Sea (X, Y) una variable aleatoria 2-dimensional con función de densidad

$$f(x, y) = \begin{cases} k^2 e^{-ky}, & \text{si } 0 < x < y, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

(20.a) Hallar la probabilidad del recinto $[0, 1] \times [0, 1]$.

(20.b) Determinar los valores de k para que f sea una función de densidad.

(20.c) Demostrar que X e $Y - X$ son independientes.

(20.d) Escribir la curva (general) de regresión y la recta de regresión de Y sobre X .

21.- Consideremos la variable aleatoria 2-dimensional (X, Y) con distribución uniforme en el recinto limitado por las rectas $y = x$, $x = -y$, $y = 1$ e $y = -1$; es decir, $f(x, y) = 1/2$ para $(x, y) \in \mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < |y| < 1\}$.

(21.a) Calcular la curva (general) de regresión de Y sobre X .

(21.b) Estudiar si X e Y son independientes y/o incorreladas.

22.- Consideremos las variables aleatorias X e Y , con rectas de regresión

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Calcular las medias marginales y el coeficiente de correlación. Identificar cuál es la recta de regresión de Y sobre X .

23.- Se considera una variable aleatoria (X, Y) con distribución $Normal_2$. Se sabe que las rectas de regresión tienen por ecuaciones $x - y + 2 = 0$, $3x - 10y + 40 = 0$; y que la suma de las varianzas de X e Y es 1.3. Determinar la correspondiente función de densidad.

The logo for 'Cartagena99' features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue background with a white arrow pointing to the right, and a yellow arrow pointing to the left, both partially overlapping the text.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70