

2. Dadas f y g de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 , $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 + x_2 - x_3)$ y $g(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, x_2 - 1, x_3)$, ver si son lineales y, en ese caso, hallar el núcleo y la imagen.

La aplicación f es lineal. La comprobación se deja como ejercicio para el alumno. La aplicación g no es lineal ($g(0, 0, 0) \neq (0, 0, 0)$).

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) &= \{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 : f(\bar{x}) = \bar{0}\} = \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0, x_2 = 0, x_1 + x_2 - x_3 = 0\} \end{aligned}$$

Dicho de otro modo, $\text{Ker}(f)$ es el subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 de ecuaciones cartesianas

$$\text{Ker}(f) \equiv \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Al resolver, resulta $\text{Ker}(f) = \{(0, 0, 0)\}$. Por otro lado, $\text{Im}(f) = L(f(B))$, siendo B cualquier base del espacio de partida \mathbb{R}^3 , por ejemplo la base canónica. Así:

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= L(f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)) = \\ &= L((1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, -1)) = \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

3. Determinar la dimensión y bases de $\text{Ker}(f)$ e $\text{Im}(f)$ para las siguientes aplicaciones lineales:

a) $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, x_1 + x_2, 3x_3)$.

Se tiene

$$\text{Ker}(f) = \begin{cases} 2x_1 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \\ 3x_3 &= 0 \end{cases}$$

Dicho de otro modo, $\text{Ker}(f) = \{(0, 0, 0)\}$, con lo que $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$ y no hay base. Por otro lado, si B_c es la base canónica de \mathbb{R}^3 ,

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

b) $f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1 - 2x_2, x_2)$.

Calculemos $Ker(f)$:

$$Ker(f) \equiv \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

de modo que $Ker(f) = \{(0, 0)\}$ y $dim(Ker(f)) = 0$.

Por otro lado,

$$Im(f) = L(f(B_c)) = L((2, 1, 0), (1, -2, 1))$$

con lo que $dim(Im(f)) = 2$ y una base suya es $B_{Im(f)} = \{(2, 1, 0), (1, -2, 1)\}$

c) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 + x_2 - x_3)$.

Se tiene

$$Ker(f) = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

de modo que $Ker(f) = \{(0, 0, 0)\}$ y $dim(Ker(f)) = 0$, por lo que no hay base. Si aplicamos la fórmula de las dimensiones para aplicaciones lineales, $3 = dim(Ker(f)) + dim(Im(f))$, de manera que $dim(Im(f)) = 3$ y, por tanto, $Im(f) = \mathbb{R}^3$.

d) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_3 + x_4)$.

Calculemos $Ker(f)$:

$$Ker(f) = \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Pasando a ecuaciones paramétricas queda

$$Ker(f) \equiv \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = -\mu \\ x_4 = 2\mu \end{cases}$$

Por tanto, $dim(Ker(f)) = 2$ y una base es

$$B_{Ker(f)} = \{(1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 2)\}.$$

La dimensión de la imagen de f es $dim(Im(f)) = dim(\mathbb{R}^4) -$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

7. Sea la aplicación $f : E \rightarrow F$, con E y F de dimensiones 3 y 4 respectivamente, definida de la siguiente forma: $f(e_2) = -e'_1 + e'_2 - e'_4$, $f(e_3) = e'_1 + e'_2 - e'_3 + e'_4$ y $e_1 \in \text{Ker}(f)$. Hallar dimensión y una base para $\text{Ker}(f)$ y para $\text{Im}(f)$.

Calculemos la matriz $A = M(f, B, B')$, siendo $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$ bases de E y F respectivamente.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\dim(\text{Im}(f)) = r(A) = 2 \quad \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(E) - \dim(\text{Im}(f)) = 1$$

Sabemos que $\text{Im}(f) = L((-1, 1, 0, 1), (1, 1, -1, 1))$, de modo que $B_{\text{Im}(f)} = \{(-1, 1, 0, 1), (1, 1, -1, 1)\}$, todo ello con coordenadas respecto de B' . Así que $\text{Im}(f) = L(-e'_1 + e'_2 - e'_4, e'_1 + e'_2 - e'_3 + e'_4)$, y una base suya es $B_{\text{Im}(f)} = \{-e'_1 + e'_2 - e'_4, e'_1 + e'_2 - e'_3 + e'_4\}$.

Falta ahora determinar una base de $\text{Ker}(f)$.

$$\text{Ker}(f) \equiv \begin{cases} -x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Pasando a paramétricas

$$\text{Ker}(f) \equiv \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Por consiguiente, una base es $B_{\text{Ker}(f)} = \{e_1\}$ (téngase en cuenta que $(1, 0, 0)$ son las coordenadas de e_1 respecto de B).



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

8. Sea la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida de la siguiente forma: $f(2, -1) = (1, 0, -1, 3)$ y $f(4, 1) = (2, -2, 3, 1)$. Calcular:

- La matriz asociada respecto de las bases canónicas.
- Las ecuaciones de $\text{Im}(f)$.

Resolvamos a).

$$\begin{aligned} f(1, 0) &= f\left(\frac{1}{6}((2, -1) + (4, 1))\right) = \frac{1}{6}f((2, -1) + (4, 1)) \\ &= \frac{1}{6}(f(2, -1) + f(4, 1)) = \frac{1}{6}((1, 0, -1, 3) + (2, -2, 3, 1)) = \\ &= \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} f(0, 1) &= f\left(\frac{1}{3}(-2(2, -1) + (4, 1))\right) = \frac{1}{3}f(-2(2, -1) + (4, 1)) \\ &= \frac{1}{3}(-2f(2, -1) + f(4, 1)) = \frac{1}{3}(-2(1, 0, -1, 3) + (2, -2, 3, 1)) = \\ &= \left(0, \frac{-2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{-5}{3}\right) \end{aligned}$$

Por consiguiente, la matriz $A = M(f, B_c, B'_c)$, siendo B_c y B'_c las bases canónicas de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^4 respectivamente, es

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 5/3 \\ 2/3 & -5/3 \end{pmatrix}$$

Esta matriz también se puede hallar observando que

$$M(f, B_c, B'_c) = M(f, B, B'_c)M(B_c, B)$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

y

$$M(B_c, B) = M(B, B_c)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & -2/3 \\ 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Sólo queda multiplicar las dos matrices:

$$M(f, B_c, B'_c) = M(f, B, B'_c)M(B_c, B) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 5/3 \\ 2/3 & -5/3 \end{pmatrix}$$

Resolvamos el apartado b). Se tiene $Im(f) = L((1, 0, -1, 3), (2, -2, 3, 1))$, de manera que una base suya es la formada por estos dos vectores. Las ecuaciones paramétricas son

$$Im(f) \equiv \begin{cases} y_1 = \lambda + 2\mu \\ y_2 = -2\mu \\ y_3 = -\lambda + 3\mu \\ y_4 = 3\lambda + \mu \end{cases}$$

Determinemos las ecuaciones cartesianas de $Im(f)$. Sea $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in Im(f)$. Entonces

$$2 = r \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}$$

de modo que las ecuaciones cartesianas son

$$Im(f) \equiv \begin{cases} -2y_1 - 5y_2 - 2y_3 = 0 \\ 6y_1 + 5y_2 - 2y_4 = 0 \end{cases}$$

10. Sea la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(1, 0, 1) = (0, 1)$, $f(0, 0, -1) = (1, 1)$, $f(2, 1, 1) = (1, 0)$

- Hallar la matriz de f respecto de las bases canónicas.
- Hallar la matriz de f respecto de las bases

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Resolvamos el apartado a). Se tiene

$$\begin{aligned} f(1, 0, 0) &= f((1, 0, 1) + (0, 0, -1)) = f(1, 0, 1) + f(0, 0, -1) = \\ &= (0, 1) + (1, 1) = (1, 2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0, 1, 0) &= f((2, 1, 1) - 2(1, 0, 1) - (0, 0, -1)) = \\ &= f(2, 1, 1) - 2f(1, 0, 1) - f(0, 0, -1) = (0, -3). \end{aligned}$$

$$f(0, 0, 1) = f(-(0, 0, -1)) = (-1, -1).$$

De modo que, si B_c y B'_c son las bases canónicas de \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^2 respectivamente, la matriz $A = M(f, B_c, B'_c)$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Resolvamos el apartado b). La matriz $M(f, B_1, B_2)$ es

$$M(f, B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Veamos el apartado c). Para determinar las ecuaciones de $\text{Ker}(f)$ y de $\text{Im}(f)$ basta considerar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Como $\text{Im}(f) = L((1, 2), (0, -3), (-1, 1)) = \mathbb{R}^2$, $\dim(\text{Im}(f)) = 2$.

Por la fórmula de las dimensiones, $\dim(\text{Ker}(f)) = 3 - 2 = 1$. Las ecuaciones cartesianas son

$$\text{Ker}(f) \equiv \begin{cases} x_1 - x_3 & = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 & = 0 \end{cases}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

13. Sean

$$B_1 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\} \text{ y } B'_1 = \{(1, -1, 1), (-1, 1, 1), (1, 1, -1)\}$$

bases de \mathbb{R}^3 . Sean B_c la base canónica y

$$B_2 = \{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0)\}$$

bases de \mathbb{R}^4 .

- ¿Qué vector de \mathbb{R}^3 tiene, respecto a la base B_1 , coordenadas $(1, 2, -1)$ y cuáles son éstas respecto a B'_1 ?
- Calcular las matrices de cambio de base de B_1 en B'_1 y de B_c en B_2 .
- Siendo f el homomorfismo caracterizado por $f(1, 1, 0) = (1, 1, 0, 0)$, $f(1, 0, 1) = (1, 0, 1, 0)$ y $f(0, 1, 1) = (0, 0, 1, 1)$, hallar la matriz de f respecto de B_1 y B_c , respecto de B_1 y B_2 , respecto de B'_1 y B_c y respecto de B'_1 y B_2 .

Resolvamos el apartado a). Buscamos un vector \bar{x} tal que sus coordenadas respecto de la base B_1 sean $X_{B_1} = (1, 2, -1)$. Esto quiere decir que

$$\bar{x} = 1(1, 1, 0) + 2(1, 0, 1) - 1(0, 1, 1) = (3, 0, 1)$$

De modo que las coordenadas de \bar{x} respecto de la base canónica de \mathbb{R}^3 , B'_c , son $X_{B'_c} = (3, 0, 1)$.

Buscamos ahora las coordenadas de \bar{x} respecto de B'_1 , $X_{B'_1}$. Téngase en cuenta que $X_{B'_1} = M(B'_c, B'_1)X_{B'_c}$. La matriz $M(B'_c, B'_1)$ es

$$M(B'_c, B'_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

En consecuencia,

$$X_{B'_1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Resolvamos el apartado b). Determinemos $P = M(B_1, B'_1)$. Téngase en cuenta que $M(B_1, B'_1) = M(B'_c, B'_1)M(B_1, B'_c)$. Como

$$M(B_1, B'_c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M(B'_c, B'_1) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$P = M(B_1, B'_1) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Falta calcular la matriz $Q = M(B_c, B_2)$. Se tendrá

$$Q = M(B_c, B_2) = M(B_2, B_c)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Resolvamos el apartado c). La matriz $F = M(f, B_1, B_c)$ es

$$F = M(f, B_1, B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinemos ahora $G = M(f, B_1, B_2)$. Resulta

$$G = M(B_c, B_2)M(f, B_1, B_c) = QF = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Tan sólo queda calcular $I = M(f, B'_1, B_2) = M(B_c, B_2)M(f, B'_1, B_c) = QH$. Se tendrá

$$I = \begin{pmatrix} 5/6 & 5/6 & -7/6 \\ -2/3 & 4/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 4/3 \\ 5/6 & -7/6 & 5/6 \end{pmatrix}$$

14. Sea la aplicación $f : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a, a + b + c, 0)$$

- Probar que f es lineal y hallar su matriz respecto de las bases canónicas.
- Obtener las bases, dimensión y ecuaciones implícitas de $\text{Ker}(f)$ e $\text{Im}(f)$.

Resolvamos el apartado a). La demostración de la linealidad de f es rutinaria y se deja como ejercicio para el alumno. La matriz asociada a f respecto de las bases canónicas es

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Estudiamos b). Comenzamos con el cálculo de las dimensiones.

$$\dim(\text{Im}(f)) = r(F) = 2$$

y

$$\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(M_{2 \times 2}(\mathbb{R})) - \dim(\text{Im}(f)) = 4 - 2 = 2$$

Una base para $\text{Im}(f)$ se obtiene a partir de las columnas de F :

$$B_{\text{Im}(f)} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0)\}$$

La ecuación implícita es

$$\text{Una base es } B_{\text{Ker}(f)} = \{(0, -1, 0), (0, 0, 1)\}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99