1. Obtener los autovalores y bases para los subespacios propios asociados a cada autovalor de las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Solución</u>:

- El polinomio característico de la matriz $A = \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ es

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 10-\lambda & -9 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (10-\lambda)(-2-\lambda) + 36 = \lambda^2 - 8\lambda + 16.$$

Los autovalores son las soluciones de $p_A(\lambda) = 0$; es decir, de $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$. La resolución de esta ecuación de segundo grado nos proporciona como único autovalor de A $\lambda_1 = 4$ con multiplicidad algebráica (m.a) $m_1 = 2$.

Para calcular el subespacio propio de A asociado al autovalor $\lambda_1 = 4$, $V(\lambda_1) = V(4) = \{v \in \mathbb{R}^2 : (A - \lambda_1 I)\, v = 0\}$, debemos resolver el sistemas homogéneo $(A - \lambda_1 I)\, v = 0$. Puesto que $(A - \lambda_1 I) = A - 4I = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$, poniendo $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, el sistema homogéneo es $\begin{cases} 6x - 9y = 0, \\ 4x - 6y = 0. \end{cases}$

Como sabemos, el sistema anterior es compatible indeterminado (pues $\lambda_1 = 4$ es autovalor de la matriz A y así $A - 4I$ es no regular) y es directo observar que se reduce a la única ecuación $2x - 3y = 0$. Las infinitas soluciones de esta ecuación pueden escribirse en al forma $\begin{cases} x = \frac{3}{2}t \\ y = t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$ y por consiguiente, $\left\{\left(\frac{3}{2}, 1\right)\right\}$ es base $V(\lambda_1)$. Nótese que también podemos elegir como base el conjunto $\{(3,2)\}$, es decir, $V(\lambda_1) = \mathrm{lin}\left(\left\{\left(\frac{3}{2}, 1\right)\right\}\right) = \mathrm{lin}\left(\{(3,2)\}\right)$.

Podemos comprobar que los cálculos está bien hechos observando que $Av = 4v$, siendo $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. En efecto,

$$Av = \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 4v.$$

- Cálculamos, en primer lugar, el polinomio característico de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 12.$$

Las raíces de $p_A(\lambda)$ son $\lambda_1 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ con multiplicidad algebráica (m.a.) $m_1 = 1$ y $\lambda_2 = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3}$ con multiplicidad algebráica (m.a.) $m_2 = 1$.

A continuación calculamos los subespacios propios $V(\lambda_1)$ y $V(\lambda_2)$.

Para determinar una base del primer subespacio propio $V(\lambda_1)$ tenemos que resolver el sistema homogéneo $(A - \lambda_1 I)\, v_1 = 0$. Tomando $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y teniendo en cuenta que $(A - \lambda_1 I) = A - 2\sqrt{3}I = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & 3 \\ 4 & -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$, las ecuaciones del sistema anterior son $\begin{cases} -2\sqrt{3}x + 3y = 0, \\ 4x - 2\sqrt{3}y = 0. \end{cases}$

Sabemos que el sistema anterior es compatible indeterminado, por tanto, una de las ecuaciones es proporcional a la otra y el sistema puede reducirse a una sola de las ecuaciones. Resolviendo la última de las ecuaciones, la solución general es $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$. Así, $V(\lambda_1) = \operatorname{lin}\left(\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)\right\}\right) = \operatorname{lin}\left(\{(\sqrt{3}, 2)\}\right)$.

Para determinar una base de $V(\lambda_2)$ tenemos que resolver el sistema homogéneo $(A - \lambda_2 I)\, v_2 = 0$. Tomando $v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y teniendo en cuenta que $(A - \lambda_2 I) = A + 2\sqrt{3}I = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 3 \\ 4 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$, las ecuaciones del sistema anterior son $\begin{cases} 2\sqrt{3}x + 3y = 0, \\ 4x + 2\sqrt{3}y = 0. \end{cases}$

Al igual que antes, el sistema puede reducirse a una sola de las ecuaciones. Resolviendo la última de las ecuaciones, la solución general es $\begin{cases} x = -\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$. Así, $V(\lambda_2) = \operatorname{lin}\left(\left\{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)\right\}\right) = \operatorname{lin}\left(\{(-\sqrt{3}, 2)\}\right)$.

Podemos comprobar que se satisfacen las relaciones $Av_1 = \lambda_1 v_1$ y $Av_2 = \lambda_2 v_2$, siendo $v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$:

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4\sqrt{3} \end{pmatrix} = 2\sqrt{3} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda_1 v_1.$$

$$Av_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix} = -2\sqrt{3} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda_2 v_2.$$

- Es directo ver que el único autovalor de la matriz nula $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es $\lambda_1 = 0$ con m.a. $m_1 = 2$. Para obtener el subespacio propio $V(\lambda_1) = V(0)$ tenemos que resolver el sistema homogéneo $\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0. \end{cases}$ Está claro que cualquier vector $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ es solución

- El único autovalor de la matriz diagonal $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es $\lambda_1 = 1$ con m.a. $m_1 = 2$.

  Como la matriz $I - \lambda_1 I = I - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, de la misma forma que antes, el subespacio propio $V(\lambda_1)$ es $V(\lambda_1) = \mathbb{R}^2$ y $\{(1,0),(0,1)\}$ una base de $V(\lambda_1)$.

- Las raíces del polinomio característico de $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1-\lambda)\left[(4-\lambda)(1-\lambda)+2\right] = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda), \end{aligned}$$

  son $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3$ y todos ellos tienen m.a. uno.
  Ahora vamos a calcular bases de cada uno de los subespacios propios.

  - Como $V(\lambda_1) = V(4) = N(A - \lambda_1 I) = \left\{v \in \mathbb{R}^2 : (A - \lambda_1 I)v = 0\right\}$, debemos resolver el sistema homogéneo $(A - \lambda_1 I)v = 0$. Poniendo $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y puesto que $A - \lambda_1 I = A - I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, el sistema homogéneo es $\begin{cases} 3x + z = 0, \\ -2x = 0, \\ -2x = 0. \end{cases}$

    Las soluciones de este sistema se pueden escribir en la forma $\begin{cases} x = 0, \\ y = t, \\ z = 0, \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$ y por tanto $V(\lambda_1) = \operatorname{lin}(\{(0,1,0)\})$.
  - Como $A - \lambda_2 I = A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, para determinar el subespacio propio

$V(\lambda_2) = V(2)$ tenemos que resolver el sistema homogéneo $\begin{cases} 2x + z = 0, \\ -2x - y = 0, \\ -2x - z = 0. \end{cases}$

Es directo observar que las infinitas soluciones de este sistema son $\begin{cases} x = t, \\ y = -2t, \\ z = -2t, \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$ y por tanto, $V(\lambda_2) = \operatorname{lin}(\{(1,-2,-1)\})$.

Teniendo en cuenta que $A - \lambda_3 I = A - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, el sistema homogéneo $(A - \lambda_3 I)v = 0$ es $\begin{cases} x + z = 0, \\ -2x - 2y = 0, \\ -2x - 2z = 0. \end{cases}$ Sus infinitas soluciones son $\begin{cases} x = -t, \\ y = t, \\ z = t, \end{cases}$ con

- El polinomio característico de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{pmatrix}$ es

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ -4 & 13 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 2 = -(\lambda - 2)\left(\lambda^2 + \lambda + 1\right),$$

luego el único autovalor real de A es $\lambda_1 = 2$ (con m.a. $m_1 = 1$), pues las soluciones de la ecuación $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ son complejas: $\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$.

Como $A - \lambda_1 I = A - 2I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 13 & -3 \end{pmatrix}$, el sistema homogéneo $(A - \lambda_1 I)\, v = 0$ es
$\begin{cases} -3x + z = 0, \\ -x + y = 0, \\ -4x + 13y - 3z = 0. \end{cases}$

Ahora aplicaremos el método de Gauss para resolver el sistema homogéneo anterior.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 13 & -3 & 0 \end{array}\right) \overset{F_1(-1/3)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 13 & -3 & 0 \end{array}\right) \underset{F_{31}(4)}{\overset{F_{21}(1)}{\longrightarrow}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 13 & -\frac{13}{3} & 0 \end{array}\right) \overset{F_{32}(-13)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Así, el sistema inicial es equivalente al sistema $\begin{cases} x - \frac{1}{3}z = 0, \\ y - \frac{1}{3}z = 0 \end{cases}$ y sus infinitas soluciones pueden expresarse en la forma $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t, \\ y = \frac{1}{3}t, \\ z = t, \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$. Por consiguiente, $V(\lambda_1) = V(2) = \operatorname{lin}\left(\left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)\right\}\right) = \operatorname{lin}\left(\{(1,1,3)\}\right)$.

Naturalmente,

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- El polinomio carcterístico de la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ -7 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = -(\lambda - 2)^3,$$

luego el único autovalor de A es $\lambda_1 = 2$ y su m.a. es $m_1 = 3$.
Determinaremos el subespacio propio $V(\lambda_1) = V(2) = N(A - \lambda_1 I) = \left\{v \in \mathbb{R}^2 : (A - \lambda_1 I)\, v = 0\right\}$ resolviendo el sistema $(A - \lambda_1 I)\, v = 0$. Puesto que $A - \lambda_1 I = A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -7 & 1 & -2 \end{pmatrix}$,

el sistema anterior es $\begin{cases} 3x + z = 0, \\ x - y = 0 \end{cases}$

Aplicando el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1(1/3)} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_{31}(7)}{\xrightarrow{F_{21}(-1)}}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2(-1)} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{32}(-1)} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

el sistema anterior es equivalente a $\left\{\begin{array}{l} x + \frac{1}{3}z = 0, \\ y + \frac{1}{3}z = 0, \end{array}\right.$ sus infinitas soluciones son $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{-3}t, \\ y = -\frac{1}{3}t, \\ z = t, \end{array}\right.$

y por tanto, $V(\lambda_1) = V(2) = \text{lin}\left(\left\{\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)\right\}\right) = \text{lin}\left(\{(-1,-1,)\,3\}\right)$.

Fijémonos que $A\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

---

4. Determinar cuáles de las siguientes matrices son diagonalizables $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Solución:

- Los autovalores de la matriz triangular inferior $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ son $\lambda_1 = 2$ con m.a. $m_1 = 2$.

  Ahora debemos determinar la multiplicidad geométrica (m.g.) de este autovalor. Puesto que la m.g. μ_1 puede obtenerse mediante

  $$\mu_1 = \dim\left(V\left(\lambda_1\right)\right) = \dim\left(N(A - \lambda_1 I)\right) = 2 - \text{rg}\left(A - \lambda_1 I\right),$$

  sólo tenemos que obtener el rango de la matriz $A - \lambda_1 I$.

Ahora bien, $A - \lambda_1 I = A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, luego $\text{rg}\left(A - \lambda_1 I\right) = 1$ y por tanto, $\mu_1 = 2 - 1 = 1$. Así, $\mu_1 = 1 \neq 2 = m_1$ y por consiguiente la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ no es diagonalizable.

Otra forma:

Sabemos que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ sólo posee un autovalor $\lambda_1 = 2$ con m.a. $m_1 = 2$. Si la matriz A fuera diagonalizable, existirían P regular y D diagonal de forma que $P^{-1}AP = D$ (o equivalentemente, $A = PDP^{-1}$).

Sabemos que la diagonal de D está formada por los autovalores de A y como A posee un único autovalore doble λ_1, tenemos que $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 I$. Así, $A = P\underbrace{D}_{=\lambda_1 I}P^{-1} =$

- El polinomio característico de $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ es

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 1.$$

Como las raíces de $p_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1$ son complejas $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$, la matriz A no posee ningún autovalor real y se dice que A es no diagonalizable en el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales.

- Como la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ es triangular inferior sus autovalores son $\lambda_1 = 1$ con m.a. $m_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$ con m.a. $m_1 = 2$.

Sabemos que la multiplicidad geométrica (m.g.) satisface la desigualdad $1 \leqslant \mu_1 \leqslant m_1$. Puesto que $m_1 = 1$, deducimos que $\mu_1 = m_1 = 1$, es decir las multiplicidades algebráicas y geométricas del primer autovalor coinciden.

Para calcular la m.g. del segundo autovalor $\lambda_2 = 2$ debemos obtener el rango de la matriz $A - \lambda_2 I$.

$A - \lambda_2 I = A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, luego $\operatorname{rg}(A - \lambda_2 I) = 2$ y por tanto,

$$\mu_2 = \dim(V(\lambda_2)) = \dim(N(A - \lambda_1 I)) = 3 - \operatorname{rg}(A - \lambda_2 I) = 3 - 2 = 1.$$

En consecuencia, $\mu_2 = 1 \neq 2 = m_2$ y la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ no es diagonalizable.

- Los autovalores de la matriz $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ son $4, -1, 2$ y 3, ya que esta matriz es triangular (inferior). Como todos ellos son distintos entre sí la matriz es diagonalizable.

- Los autovalores de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ son 2 de $m.a.(\lambda = 2) = 2$ y 3 de $m.a.(\lambda = 3) = 2$.

Para saber si es o no diagonalizable es suficiente con conocer la dimensión de los subespacios propios $V(2) = N(2I - A)$ y $V(3) = N(3I - A)$. Para ello es suficiente con que estudie el rango de las matrices $(2I - A)$ y $(3I - A)$. $(2I - A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

6. Encontrar una matriz cuadrada de orden dos cuyos autovalores sean 1 y 2 y tal que $V(1) = \operatorname{lin}\{(1,1)\}$ y $V(2) = \operatorname{lin}\{(1,0)\}$.

Solución:

Sabemos que una matriz de orden dos que tenga dos autovalores distintos es diagonalizable y que una matriz de paso está determinada por los autovectores linealmente independientes. En este caso, $A = PDP^{-1}$, donde $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos P^{-1} : $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Por tanto, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Comprobamos que $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7. Encontrar una matriz cuadrada de orden tres cuyos autovalores sean -1 y 2 y tal que $V(2) = \operatorname{lin}\{(1,1,-1)\}$ y $V(-1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0\}$.

Solución:

Como en el ejercicio 6, debemos encontrar una matriz de paso y su correspondiente matriz diagonal. Para ello, hay que encontrar bases de los subespacio propios.

Resolviendo el sistema $x - z = 0$, se obtiene que $V(-1) = \operatorname{lin}(\{(0,1,0),(1,0,1)\})$. Así, utilizando que $V(2) = \operatorname{lin}\{(1,1,-1)\}$, deducimos que

$$P^{-1}AP = D, \quad \text{siendo } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente, sólo debemos calcular la inversa de P para determinar la matriz A. Dejamos dicho cálculo al alumno y finalmente encontramos

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

---

9. Encontrar una matriz de paso ortogonal que diagonalize ortogonalmente a cada una de las siguientes matrices.

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución:

Todas las matrices de este ejercicio puede diagonalizarse mediante una matriz de paso ortogonal, pues son simétricas.

- El polinomio característico de $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ es

$(1,2) \cdot (-2,1) = 0$.

Para obtener una matriz de paso ortogonal debemos ortonormalizar cada base de los subespacios propios. En este caso es sencillo, pues las bases de los dos subespacios propios tienen un único vector y la ortornormalización se lleva a cabo normalizando los vectores $v_1 = (1, 2)$ y $v_2 = (-2, 1)$. Por tanto, la matriz da paso ortogonal es $Q = \left(\ w_1 \ \middle| \ w_2 \ \right)$, siendo

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \qquad \text{y} \qquad w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

y se satisface

$$Q^{-1}AQ = Q^tAQ = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

- Calculamos el polinomio característico de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda\left((\lambda-1)^2 - 1\right) = \lambda\left(\lambda^2 - 2\lambda\right) =$$

$\lambda^2(\lambda - 2)$, luego los autovalores son $\lambda = 0$ de $m.a.(\lambda = 0) = 2$ y $\lambda = 2$ de $m.a.(\lambda = 2) = 1$
Obtenemos el subespacio propio asociado al autovalor $\lambda = 0$. Para ello debemos resolver el sistema de ecuaciones homogéneo $(0I - A)\,x = 0$.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{x + y = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -t \\ x = t \\ z = s \end{cases}, \text{ luego } V(0) = \operatorname{lin}\left(\{(-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}\right).$$

Obtenemos el subespacio propio asociado al autovalor $\lambda = 2$. Para ello debemos resolver el sistema de ecuaciones homogéneo $(2I - A)\,x = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ x = t \\ z = 0 \end{cases}, \text{ luego } V(2) = \operatorname{lin}\left(\{(1, 1, 0)\}\right).$$

Como los autovalores de la matriz $\{(-1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ son ortogonales, normalizando obtenemos una base de vectores ortonormales y una matriz de paso ortogonal. Por la tanto una matriz de paso ortogonal será $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz diagonal será $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- El polinomio característico de $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ es

$$p_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3+6\lambda^2-9\lambda=-\lambda\,(\lambda-3)^2,$$

luego sus autovalores son $\lambda_1=0$ con m.a. $m_1=1$ y $\lambda_2=3$ con m.a. $m_2=2$.

  - Para determinar una base del primer subespacio propio $V(\lambda_1)$ debemos resolver el sistema $(A-\lambda_1 I)\,v=0$. Para ello aplicaremos el método de Gauss al sistema con matriz ampliada $\left(\ A-\lambda_1 I \mid 0\ \right)=\left(\ A-0I \mid 0\ \right)=\left(\ A \mid 0\ \right)$.

$$\left(\ A\quad 0\ \right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)\xrightarrow{F_1(1/2)}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)\underset{F_{31}(1)}{\xrightarrow{F_1(1)}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 & -3/2 & 0 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & 0 \end{array}\right)\xrightarrow{F_2(2/3)}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & 0 \end{array}\right)\xrightarrow{F_{32}(3/2)}$$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Así, el sistema homogéneo $(A-\lambda_1 I)\,v=0$ es equivalente al sistema $\left\{\begin{array}{l} x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z=0 \\ y-z=0 \end{array}\right.$ sus infinitas soluciones son $\left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=t \\ z=t \end{array}\right.$ y por tanto, $\{(1,1,1)\}$ es una base de $V(\lambda_1)$. Normalizando este vector obtenemos una base ortonormal de $V(\lambda_1)$; es decir, $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$ es una base ortonormal de $V(\lambda_1)$.

Como necesitamos una matriz de paso ortogonal debemos encontrar una base ortonormal de $V(\lambda_2)$. Para ello, aplicaremos el método de Gram-Schmidt a la base $\{u_1=(1,0,-1),u_2=(0,1,-1)\}$.

Tomamos $v_1=u_1$ y elegimos $w_1=\frac{v_1}{\|v_1\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.

Ahora tomamos $v_2=u_2-\underbrace{(u_2\cdot w_1)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}}\cdot w_1=(0,1,-1)-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)=\left(-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2}\right)$ y

normalizando conseguimos el vector $w_2=\frac{v_2}{\|v_2\|}=\left(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$. Por tanto,

$\left\{w_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right),w_2=\left(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}}\right)\right\}$ es base ortonormal del subespacio propio $V(\lambda_2)$.

Uniendo las dos bases ortonormales de los subespacios propios, conseguimos una base ortornormal de $\mathbb{R}^3$ y por tanto, una matriz ortogonal. Es decir, la matriz de paso ortogonal es

$$Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

y la matriz diagonal es

- Calculamos el polinomio característico de la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-5 & -4 & -2 \\ -4 & \lambda-5 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-5)\begin{vmatrix} \lambda-5 & -2 \\ -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -4 & \lambda-5 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$= \lambda^3 - 12\lambda^2 - 21\lambda - 10 = (\lambda-1)^2(\lambda-10)$. Luego los autovalores son $\lambda = 1$ de $m.a.(\lambda = 1) = 2$ y $\lambda = 10$ de $m.a.(\lambda = 10) = 1$.

Obtenemos el subespacio propio asociado al autovalor $\lambda = 1$. Para ello debemos resolver el sistema de ecuaciones homogéneo $(I - A)x = 0$.

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 & -2 \\ -4 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & -4 & -2 & 0 \\ -4 & -4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\{x + y + \frac{1}{2}z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -t - s \\ x = t \\ z = 2s \end{cases}$, luego $V(0) = \mathrm{lin}(\{(-1,1,0),(-1,0,2)\})$.

Obtenemos el subespacio propio asociado al autovalor $\lambda = 10$. Para ello debemos resolver el sistema de ecuaciones homogéneo $(10I - A)x = 0$.

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 8 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{cases} x + y - 4z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ x = 2t \\ z = t \end{cases}$, luego $V(10) = \mathrm{lin}(\{(2,2,1)\})$.Comprobamos que los autovectores correspondientes a autovalores distintos nos salen ortogonales $(-1,1,0).(2,2,1) = 0$ y $(-1,0,2)(2,2,1) = 0$.

Una matriz de paso sería $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, pero esta matriz no es ortogonal. Buscamos una matriz de paso P que sí sea ortogonal. Para ello seleccionamos una base de $V(1)$ que sea ortogonal por el método de Gram-Schmidt

$v_1 = u_1 = (-1,1,0)$

$v_2 = u_2 - \frac{u_2.v_1}{v_1.v_1}v_1 = (-1,0,2) - \frac{1}{2}(-1,1,0) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2\right)$. Tomamos como $v_2 = (-1,-1,4)$. Comprobamos $v_1.v_2 = 0$ y que $(2,2,1).(-1,-1,4) = 0$. Ahora tenemos una base ortogonal de autovectores $\{(2,2,1),(-1,1,0),(-1,-1,4)\}$. Normalizando esta base obtenemos una base ortonormal y la matriz de paso ortogonal que buscábamos: $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

---

10. Los autovalores de una matriz simétrica A, de orden tres, son $1, -2$ y 3 y los subespacios propios asociados son $V(1) = \mathrm{lin}\{(1,1,-1)\}$, $V(-2) = \mathrm{lin}\{(0,1,1)\}$. Obtener una base para $V(3)$ y averiguar cuál es la matriz A.

Por último, $A = PDP^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{6}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{2}} & \frac{-3}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{6} & -\frac{4}{6} & \frac{4}{6} \\ -\frac{4}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{11}{6} \\ \frac{4}{6} & -\frac{11}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}.$
