3.5. Ejercicios

1. ¿De cuántas maneras se pueden colocar en el tablero de ajedrez 8 torres? Las torres son iguales y no se impone que no puedan comerse unas a otras.

   Sol.: 4.328.284.968.

2. Con siete botes de pintura, cada uno de un color diferente, ¿cuántas mezclas de tres colores se pueden formar utilizando la misma cantidad de pintura de cada bote?

   Sol.: 35.

3. ¿Cuántas diagonales tiene un pentágono regular?, ¿y un polígono convexo de n lados?

   Sol.: 5; $C_n^2 - n$.

4. En un examen hay que realizar cuatro problemas a elegir entre ocho propuestos. ¿Cuántas opciones son posibles?

   Sol.: 70.

5. En una hora de clase da tiempo a que salgan seis alumnos a hacer un problema cada uno, si hay 90 alumnos ¿cuántas opciones son posibles?

   Sol.: 622.614.630.

6. Se lanza una moneda al aire ocho veces, ¿de cuántas formas se pueden obtener tres caras?, ¿y cuatro cruces?, ¿y si han salido tres caras seguidas?

   Sol.: 56; 70; 6.

7. Al empezar un juego de cartas recibimos tres cartas de la baraja española, ¿cuántas jugadas diferentes podemos recibir?, ¿en cuántas de ellas aparecerá un trío?, ¿en cuántas aparecerán dos reyes y un as?

   9880; 40; 24.

8. En el juego del dominó se reparten las 28 fichas entre cuatro jugadores. ¿De cuántas formas diferentes puede coger las fichas el primer jugador?, ¿de cuántas formas puede hacerse el reparto total?

   Sol.: 1.184.040; $C_{28}^7 \cdot C_{21}^7 \cdot C_{14}^7 \cdot C_7^7$.

9. Dada una cuadrícula de $n \times n$ casillas, ¿cuántos rectángulos pueden marcarse sobre ella?

   Sol.: $\left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^2$.

10. Una caja contiene siete bolas, de las que tres son rojas, dos son azules y dos blancas. ¿De cuántas formas se pueden seleccionar tres bolas de manera que al menos dos sean rojas?

Sol.: 13.

11. El diseño de una baldosa consiste en un tablero 4×4, con 8 casillas blancas y 8 negras. Si en cada fila debe haber dos casillas negras: a) ¿cuántos diseños distintos pueden formarse? b) ¿Y si además no puede haber dos filas iguales? (Suponemos que para el diseño miramos siempre a la baldosa desde una misma posición y que en ésta no se consideran giros de la misma).

Sol.: 1296; 360.

12. ¿De cuántos modos se pueden construir sucesiones de nueve ceros y cinco unos de modo que no haya dos unos juntos?

Sol.: 252.

13. En un estante hay doce libros. ¿De cuántas formas se pueden coger cinco libros de modo que dos no estuviesen juntos?

Sol.: 56.

14. Supongamos que tenemos un estante con n libros y que queremos elegir de ellos k libros de modo que no estén dos de ellos juntos, ¿de cuántas formas puede hacerse? ¿Tiene siempre solución el problema?

Sol.: C^k_{n-k+1}; $n \geq 2k - 1$.

15. Una persona tiene siete libros de matemáticas y otra nueve. ¿De cuántos modos pueden cambiar dos libros de una por dos libros de otra?

Sol.: 756.

16. De una baraja inglesa, que contiene 52 cartas, se han extraído 10. ¿En cuántos casos entre ellas habrá un as? ¿En cuántos habrá exactamente un as? ¿En cuántos habrá no menos de dos ases? ¿Y exactamente dos ases?

Sol.: 9.279.308.324; $4 \cdot C^9_{48}$; $C^{10}_{52} - C^{10}_{48} - 4 \cdot C^9_{48}$; $C^2_4 \cdot C^8_{48}$.

17. En un club de atletismo hay que formar un equipo de 4 personas entre 30 candidatos para participar en una carrera de 1000 m. ¿De cuántas maneras puede hacerse? ¿De cuántas se puede formar un equipo de 4 personas para participar en la carrera de relevos $100 + 200 + 400 + 800$?

Sol.: 27405; 657720.

18. Hay n abonados en una red de telefonía. ¿De cuántos modos se pueden unir al mismo tiempo tres pares?

Sol.: $\frac{n!}{48\cdot(n-6)!}$.

19. De un grupo formado por siete hombres y cuatro mujeres hay que escoger a seis personas de forma que entre ellas haya al menos dos mujeres. ¿De cuántas maneras puede efectuarse la elección?

Sol.: 371.

20. Una compañía está formada por tres oficiales, seis sargentos y sesenta soldados. ¿De cuántas maneras se puede elegir entre ellos un destacamento integrado por un oficial, dos sargentos y veinte soldados? ¿Y si en el destacamento debe estar el jefe de la compañía y el mayor de los sargentos?

Sol.: $C_3^1 \cdot C_6^2 \cdot C_{60}^{20}$; $C_5^1 \cdot C_{60}^{20}$.

21. En una unidad hospitalaria hay 12 médicos y 15 enfermeros. ¿De cuántas maneras se pueden elegir cuatro parejas para la atención de consultas externas?

Sol.: $C_5^1 \cdot C_{60}^{20}$.

22. ¿Cuántas formas existen de elegir 12 personas de entre 17 si dos personas dadas de estas 17 no pueden ser elegidas juntas?

Sol.: 3185.

23. Un coro está integrado por 10 personas. ¿De cuántos modos se pueden elegir 6 durante tres días, de forma que cada día el coro tenga distinta composición?

Sol.: 9.129.120.

24. ¿De cuántas maneras se puede disponer 12 fichas blancas y 12 negras en las casillas negras de un tablero de ajedrez?

Sol.: $C_{32}^{12} \cdot C_{20}^{12}$.

25. Un examen consta de diez preguntas, de las que cada alumno ha de elegir solo ocho. ¿De cuántos modos puede hacer cada alumno su elección? Si un alumno tuviese que responder solo a dos preguntas, ¿de cuántos modos podría hacer su elección?

Sol.: 45; 45.

26. Se consideran veinte puntos del plano, entre los que no hay tres colineales (es decir, no hay tres que estén en una misma línea recta). ¿Cuántas rectas pueden trazarse uniendo pares de puntos? ¿Cuántos triángulos podrán dibujarse uniendo ternas de puntos?

Sol.: 190; 1140.

27. Para $m \in \mathbb{Z}^+$, determinar $(x-a)^m$.

28. Siendo $x \in \mathbb{R}$, calcular, sin desarrollar, el coeficiente de x^6 en $(x-3)^{11}$.

29. Probar que para dos coeficientes de términos seguidos del binomio de Newton $\binom{m}{k-1}x^{m-k+1}a^{k-1}$ y $\binom{m}{k}x^{m-k}a^{k}$ se verifica que $\binom{m}{k} = \binom{m}{k-1}\frac{m-k+1}{k}$.

30. Demostrar que $n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

31. Demostrar que

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{n}{k},$$

para cada $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $k \leq n$.

32. Calcular el valor de la suma $\sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2)$.

33. A la hora del almuerzo 6 estudiantes de Matemática Discreta, que tienen por la tarde tutoría, van a comer a la cafetería. Pueden elegir (cada uno) entre cuatro menús de bocadillos. ¿cuántos pedidos son posibles?

Sol.: 84.

34. Un padre tiene cuatro hijos y desea repartir entre ellos 100 euros en biletes de 10 .

a) ¿De cuántas formas puede hacerlo?

b) ¿De cuántas formas puede hacerlos si cada hijo al menos debe recibir 10 euros?

c) Si cada hijo debe recibir al menos 10 euros, pero además el mayor debe recibir al menos 50 euros, ¿cuántas posibilidades hay?

Sol.: 286; 84; 10.

35. ¿De cuántas formas se pueden repartir 7 billetes de 10 euros y y 4 billetes de 5 euros entre 4 personas, de modo que cada persona reciba al menos un billete de 10 euros?

Sol.: 700.

36. Se va a realizar un mural compuesto por 57 piezas en línea. De ellos 12 son imágenes de grandes científicos de la Historia de la Ciencia (y los 12 son distintos) y 45 piezas (que son iguales entre sí todas, con el escudo de una sociedad científica) se colocarán entre las imágenes de científicos, de modo que como mínimo entre cada par de imágenes debe haber al menos tres piezas de escudos. El mural debe empezar y terminar con la imagen de un científico. ¿De cuántas formas se puede hacer el mural?

Sol.: $3097 \cdot 10^4$.

37. Una pastelería ofrece 20 tipos de distintos pasteles. Si hay al menos una docena de cada tipo, ¿de cuántas maneras se puede seleccionar una docena?

Sol.: 141.120.525.

38. Se desea colorear 9 pelotas de golf con 4 colores diferentes. ¿De cuántas formas puede hacerse?

Sol.: 220.

39. ¿De cuántas formas se puede distribuir diez bolas entre cinco cajas diferentes?

Sol.: 1.001.

40. ¿De cuántas formas se pueden colocar 7 anillos idénticos en 4 dedos de una misma mano?

Sol.: 120.

41. Sean los enteros de siete dígitos (desde 10^6 hasta 9.999.999. Clasificamos estos números en conjuntos de modo que en un mismo conjunto estén todos los que se componen de los mismos dígitos (por ejemplo, 8.122.333 y 3.213.283 estarán en el mismo conjunto). ¿Cuántos subconjuntos hay?

Sol.: $CR_{10}^{7} - 1$.

42. ¿Cuántos números hay en el conjunto $\{1, 2, \ldots, 1000\}$ que tengan la propiedad de que la suma de sus dígitos sea cinco.

Sol.: 21.

43. Se arrojan simultáneamente cinco dados idénticos, ¿en cuántos aparece al menos un 3?

Sol.: 126.

44. Un florista prepara ramos de 12 claveles, pudiendo ser éstos blancos, rojos o rosas. Nunca en un ramo coloca más de seis claveles rojos. ¿Cuántos ramos distintos puede obtener?

Sol.: 70.

45. ¿De cuántas formas se pueden distribuir diez bolas blancas entre seis personas?

Sol.: C_{15}^{10}.

46. Se sabe que hay 3003 soluciones enteras no negativas de la ecuación $x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = 10$, ¿cuántas habrá para la inecuación $x_1 + x_2 + \ldots + x_6 < 10$.

Sol.: 5.005.

47. ¿Cuántos números naturales menores que un millón tiene la suma de sus cifras igual a 12?

Sol.: 6.062.

48. Dos mujeres y tres hombres se suben a un ascensor en la planta baja de un edificio de seis plantas. Averiguar de cuántas maneras se pueden bajar del ascensor sabiendo que en una misma planta no pueden bajar personas de distinto sexo.

Sol.: 200.

49. Se arrojan simultáneamente seis dados idénticos, ¿en cuántos aparece al menos un 3?, ¿en cuántos un solo 4?, ¿en cuántos ningún 5?

Sol.: 252; 126; 210.

50. Hallar de cuántas maneras se pueden distribuir cuatro pelotas de golf en diez cajas si:

a) Las pelotas son indistinguibles y en ninguna caja cabe más de una pelota.

b) Todas las pelotas son diferentes y en cada caja caben cuantas pelotas se deseen.

c) Las pelotas son indistinguibles y en cada caja caben cuantas pelotas se deseen.

Sol.: 210; 10.000; 715.

51. Dados los números $\{-5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$, ¿de cuántas maneras se pueden seleccionar cuatro de ellos de modo que el producto de los cuatro sea positivo y cada número pueda seleccionarse cuatro veces?

Sol.: 180.

52. ¿Cuántas soluciones enteras mayores que 5 tiene la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 48?$$

Sol.: 2.925.

53. ¿Cuántas soluciones enteras tiene la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 48$ tal que $x_1 > 5, x_2 > 6, x_3 > 7, x_4 > 8$?

Sol.: 1.330.

54. Hallar el número de soluciones enteras no negativas de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ tal que:

a) $x_1 \geq 6$.

b) $x_1 \geq 6, x_2 \geq 6$.

Sol.: 680; 165.

55. En el examen de MD cada alumno ha de coger un bolígrafo de una caja para hacer el examen. Todos los bolígrafos son iguales en forma, modelo y tamaño, pero los hay de tres colores diferentes (azul, negro o verde) y hay 90 bolígrafos de cada color. Si han asistido 90 alumnos, ¿cuántas posibles distribuciones se pueden dar en cuanto a los colores de los bolígrafos escogidos elegidos?

Sol.: 4.186 .

56. Hallar una fórmula para el número de soluciones de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$ en enteros no negativos que satisfagan:

a) $x_1 \geq c_1$.

b) $x_1 \geq c_1$ y $x_2 \geq c_2$.

Sol.: $C^3_{n-c_1+3}$; $C^3_{n-c_1-c_2+3}$.

57. Una bolsa con monedas contiene 8 monedas de dos euros, 7 monedas de un euro, 4 de cincuenta céntimos y 3 de veinte céntimos. Suponemos que todas las monedas de una misma cantidad son idénticas. ¿De cuántas maneras puede elegirse una colección de 10 monedas tomadas de esa bolsa?

Sol.: 136.

58. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer seis cartas al azar de una baraja de 52 cartas sean todas rojas?

Sol.: $\frac{C^6_{26}}{C^6_{52}}$.

59. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un total de 13 cuando se arrojan 4 dados?

Sol.: $\frac{140}{6^4}$.