ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 3. ESPACIOS VECTORIALES EUCLIDEOS Y HERMÍTICOS II

1. Dada la base $B' = \{u_1 = (-2,-1,1),\ u_2 = (0,-1,0),\ u_3 = (1,-1,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$,
a) Demuestra que existe un producto escalar ϕ respecto al cual B' es base ortogonal. Decide de manera razonada si ϕ es único con esta propiedad.
b) Demuestra que existe un producto escalar ψ respecto al cual B' es base ortonormal. ¿Hay un único ψ con esta propiedad? Describe la matriz de ψ respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

2. Decide de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
a) En el espacio vectorial euclídeo E, $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$ son vectores ortogonales si y sólo si $||\vec{u}|| = ||\vec{v}||$.
b) En un espacio vectorial euclídeo X se cumple para todos los vectores $\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z} \in X$ la igualdad

$$\|\,\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}\,\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + \|\vec{z}\|^2 + 2\left(\langle\vec{x},\vec{y}\rangle + \langle\vec{y},\vec{z}\rangle + \langle\vec{z},\vec{x}\rangle\right)$$

c) En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, podemos encontrar dos vectores $\vec{x},\vec{y}$ y un producto escalar Φ tales que $\Phi(\vec{x},\vec{x}) = 1$ y $\Phi(\vec{y},\vec{y}) = \Phi(\vec{x},\vec{y}) = 2$.

3. Sea (E,ϕ) un espacio vectorial euclídeo y sea $\|\cdot\|$ la norma asociada a ϕ.
a) Demuestra que, para todo par de vectores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$, se da la igualdad

$$2(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2) = \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 \quad \textit{(Ley del paralelogramo)}$$

b) Demuestra que $4\phi(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2$ para todo par de vectores $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v} \in E$. Esta igualdad se conoce como la *Identidad de polarización.*
c) Demuestra que $2\phi(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2$ para todo par de vectores $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v} \in E$.
d) Demuestra la siguiente generalización del teorema de Pitágoras:

$$\|\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} + \cdots + \overrightarrow{u_n}\|^2 = \|\overrightarrow{u_1}\|^2 + \|\overrightarrow{u_2}\|^2 + \cdots + \|\overrightarrow{u_n}\|^2$$

si los vectores $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n} \in E$ son ortogonales dos a dos.

4. Sea $\|\vec{x}\| = |x_1| + |x_2|$ definida en $\mathbb{R}^2$. Demuestra que $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathbb{R}^2$, pero que no proviene de ningún producto escalar porque no satisface la ley del paralelogramo.

5. Denuestra que $\forall\ \vec{x},\vec{y} \in E$ se cumple $\|\vec{x}-\vec{y}\| \geq \big|\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|\big|$, siendo E un espacio euclídeo.

6. Calcula el complemento ortogonal del subespacio

$$W = \{\vec{x} = (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1+x_2+x_3+x_4 = 0,\ 2x_1 - x_2 = 0\}\,,$$

cuando se considera en $\mathbb{R}^4$ el producto escalar usual.

7. En $\mathbb{R}^3$, encuentra un producto escalar para el que el complemento ortogonal del plano $\{x = 0\}$ sea la recta $\{x = y,\ z = 0\}$.

8. En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual, determina la ecuación de la proyección ortogonal sobre el subespacio vectorial generado por los vectores $(1,1,-1,0)$ y $(0,0,2,1)$.

9. Se considera el espacio vectorial euclideo de polinomios V_3 del problema 4 de la Hoja 2.
a) Calcula la ecuación de la proyección ortogonal sobre el subespacio V_1 en coordenadas en la base usual.
b) Calcula la proyección ortogonal de x^3 sobre V_2 usando la base ortonormal calculada en el problema 4 de la Hoja 2.