# ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

**Hoja 5**. ESPACIOS AFINES

**1.** Considera el plano afín $A^2(\mathbb{F}_3)$ sobre $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, el cuerpo de 3 elementos.
**a)** Calcula cuántos puntos y rectas afines hay en $A^2(\mathbb{F}_3)$. Calcula el cardinal de una recta.
**b)** Calcula el número de rectas paralela a una dada, y el número de haces de rectas paralelas que hay en $A^2(\mathbb{F}_3)$.

**2.** ¿Qué dimensión tiene la variedad lineal $L$ de $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ generada por los puntos $p_1 = (1, 0, 0, 1)$, $p_2 = (0, 1, 0, 1)$ y $p_3 = (0, 0, 1, 1)$? ¿Qué ecuaciones implícitas verifica todo $p = (x, y, z, t) \in L$?

**3.** Estudia la posición relativa de las variedades lineales $L_1 = (1, 0, 0, 0)+\langle(0, 2, 1, 0), (0, -1, 1, 0)\rangle$ y $L_2 = \{(x, y, z, t) : x + y + z + t = 4, x - y - z - t = -2\}$. En caso de incidencia, describe las variedades lineales intersección y suma afín de $L_1$ y $L_2$.

**4.** Considera la familia de planos $2\lambda x + (\lambda + 1)y - 3(\lambda - 1)z + 2\lambda - 4 = 0$ en $\mathbb{A}^3$.
**a)** Demuestra que estos planos tienen una recta en común.
**b)** Determina los planos de la familia que pasan por el punto $(1, -1, 2)$.
**c)** ¿Cuáles de los planos de esta familia son paralelos a la recta $L$ dada por las ecuaciones implícitas $x + 3z - 1 = 0,\ y - 5z + 2 = 0$ ?

**5.** Encuentra la recta que pasa por $P = (1, 6, -3)$ y corta a las rectas

$$s = \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y + 3z + 4 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad t = \begin{cases} x + y + 3z - 1 = 0 \\ x + 2z - 5 = 0 \end{cases}$$

**6.** Calcula la dimensión del subespacio afín de $\mathbb{R}^5$ generado por los puntos $p_1 = (-1, 2, -1, 0, 4)$, $p_2 = (0, -1, 3, 5, 1)$, $p_3 = (4, -2, 0, 0, -3)$, $p_4 = (3, -1, 2, 5, 2)$.

**7.** Sea $M$ la variedad lineal de $\mathbb{R}^4$ engendrada por los puntos: $p_0 = (1, 0, 0, 0)$, $p_1 = (2, 1, 0, 0)$, $p_2 = (3, 1, 0, 0)$, $p_3 = (4, 2, 0, 0)$. Sea $L$ la variedad lineal de ecuaciones paramétricas

$$x_1 = 2\lambda + 5,\ x_2 = \lambda + 1,\ x_3 = \lambda + 1,\ x_4 = \lambda + 1\ .$$

Halla ecuaciones implícitas de $L+M$, $L\cap M$. Comprueba que se verifica la fórmula de Grassmann.

**8.** Para cada $i = 1, 2, 3$, toma la recta $L_i \subset \mathbb{R}^2$de ecuación $a_ix+b_iy+c_i = 0$, con $(a_i, b_i) \neq (0, 0)$.
**a)** Comprueba que la condición

$$(*) \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

es necesaria para que las rectas sean concurrentes (es decir, se corten las tres en el mismo punto).
**b)** Da un ejemplo de tres rectas no concurrentes que verifiquen $(*)$.
**c)** Supongamos que se da la condición $(*)$.¿Qué condiciones geométricas y algebraicas han de verificarse para que las tres rectas sean concurrentes?

**9.** En el espacio afín $(A, V, \varphi)$ de dimensión $n$, sean $L_1$ y $L_2$ dos variedades lineales. Demuestra que si $\dim(L_1) = n - 1$ y $\dim(L_2) \geq 1$, entonces $L_1$ y $L_2$ no se pueden cruzar.

**10.** En el espacio afín $(A, V, \varphi)$ de dimensión $n$, sean $L_1 = a_1+V_1$ y $L_2 = a_2+V_2$ dos variedades lineales. Demuestra que si $V = V_1 \oplus V_2$, entonces $L_1$ y $L_2$ se cortan en un punto.