ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 6. Espacios afines II

1. Considera los puntos de $\mathbb{R}^3$: $p_0 = (0,0,1)$, $p_1 = (0,1,0)$, $p_2 = (0,0,0)$, $p_3 = (1,0,0)$, $q_0 = (2,1,1)$, $q_1 = (1,0,1)$, $q_2 = (1,1,0)$, $q_3 = (0,0,-1)$.
a) Comprueba que se puede definir una referencia cartesiana R_1 en la que p_0 tiene coordenadas $(0,0,0)$ y p_i tiene coordenadas nulas salvo un 1 en la posición número i.
b) Idem para una referencia cartesiana R_2 basada en los q's. ¿Cuál es el cambio de coordenadas entre R_1 y R_2? ¿Qué ocurriría si en lugar del q_3 dado se tomase $q_3 = (0,-1,1)$?

2. En el plano afín $\mathbb{R}^2$ se considera el triángulo abc y con relación a él los sistemas de referencia $\mathcal{R} = \{a; \vec{ab}, \vec{ac}\}$, y $\mathcal{R}' = \{b; \vec{ba}, \vec{bc}\}$.
a) Halla las ecuaciones que permiten pasar de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$.
b) ¿Qué puntos del plano que tienen las mismas coordenadas respecto a ambos sistemas?

3. En $\mathbb{A}^3$ se considera $\mathcal{R} = \{O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ y $\mathcal{R}' = \{O', \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$. Supongamos que las coordenadas de O' en $\mathcal{R}$ son $(-1,6,2)$, y que $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 + \vec{u}_3$, $\vec{v}_2 = -\vec{u}_1$ y $\vec{v}_3 = 2\vec{u}_1 + 5\vec{u}_2 + 7\vec{u}_3$. Si un plano tiene ecuación $2x - y + 3z = 0$ en $\mathcal{R}$, halla su ecuación en coordenadas en $\mathcal{R}'$.

4. Sean $A = (1,1,1), B = (1,2,3), C = (2,3,1)$ y $D = (3,1,2)$ cuatro puntos de $\mathbb{A}^3$ dados por sus coordenadas cartesianas respecto a un sistema de referencia $\mathcal{R}$.
a) Demuestra que $\mathcal{R}' = \{A, B, C, D\}$ es un sistema de referencia baricéntrico.
b) Calcula las coordenadas cartesianas respecto a $\mathcal{R}$ del baricentro de A, B, C, D.
c) Si $\mathcal{R} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, halla las coordenadas baricéntricas de O respecto a $\mathcal{R}'$.

5. Sea A un espacio afín, y $N \subset A$ no vacío. Demuestra que para que N sea un subespacio afín es necesario y suficiente que toda combinación baricéntrica de puntos de N esté en N.

6. Sea $\mathcal{R} = \{p_0, \dots, p_n\}$ una referencia baricéntrica de un espacio afín (A, E, φ). Considera r puntos $q_1, \dots, q_r$ en A, y $(\lambda_{i,0}, \dots, \lambda_{i,n})$ las coordenadas baricéntricas de q_i en la referencia $\mathcal{R}$. Considera la matriz $\Lambda = (\lambda_{i,j})$. Demuestra que para que el subespacio afín engendrado por $q_1, \dots, q_r$ tenga dimensión $r-1$, es condición necesaria y suficiente que Λ tenga rango r.

7. Como consecuencia del ejercicio anterior, discute por qué es cierto que en un espacio afín de dimensión n, una variedad lineal de dimensión k se puede describir *en coordenadas baricéntricas* mediante $n-k$ ecuaciones homogéneas mas una ecuación adicional ¿Cuál es esa ecuación?

8. Sea L el hiperplano de ecuación $2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 2$ respecto de un cierto sistema de referencia cartesiano $\{O, \vec{e_1}, \dots, \vec{e_4}\}$. Define un sistema de referencia baricéntrico, y calcula las ecuaciones que describen ese mismo hiperplano en coordenadas (baricéntricas) en dicho sistema.

9. Prueba que en $\mathbb{A}^2$ los puntos medios de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo.

10. Considera un triángulo abc del plano afín real $\mathbb{R}^2$, y tres puntos a', b', c' sobre los lados bc, ca, ab, respectivamente. Encuentra una condición necesaria y suficiente para que los triángulos abc y $a'b'c'$ tengan el mismo baricentro.

11. Considera las rectas del plano afín real de ecuaciones $L_1 : 3x + 2y = 1$, $L_2 : y = 5$, $L_3 : 6x + y = -13$ (respecto de un sistema de referencia cartesiano dado). Halla los triángulos de vértices a, b, c que tienen sus medianas[1] paralelas a estas rectas, el vértice a sobre la recta L_1 y el $(-1,2)$ como punto medio del lado bc.

[1] Mediana: recta que conecta un vértice con el punto medio del lado opuesto.