Ejercicios Jordan

1 PRÁCTICOS.

Ejercicio 1.

a) Demostrar que si f es un endomorfismo diagonalizable, entonces f^n es diagonalizable cualquiera que sea $n \geq 1$.
b) Dar un ejemplo de un endomorfismo f definido en un espacio vectorial tal que $f^2 \neq 0$ y $f^3 = 0$. Probar que f no es diagonalizable.

Ejercicio 2.

En un espacio vectorial V se considera un endomorfismo f cuyo polinomio característico es

$$P_{c,f}(x) = (x-2)^7$$

tal que $ran(f - 2id_V) = 3$, $ran(f - 2id_V)^2 = 1$. Determinar la forma canónica de Jordan.

Ejercicio 3.

En $\mathbb{R}^1 3$ se tiene un endomorfismo f con un único valor propio λ que satisface las siguientes condiciones:

$$dim\ ker(f - \lambda Id)^5 = 11, \ \ dim\ ker(f - \lambda Id)^6 = 13$$

Determinar las posibles formas de Jordan de f y, en cada caso, calcular $dim\ ker(f - \lambda Id)$.

Ejercicio 4.

En $\mathbb{R}^1 0$ se tiene un endomorfismo f con un único valor propio λ que satisface la siguiente condición:

$$dim\ ker(f - \lambda Id)^5 = 9$$

Determinar las posibles formas de Jordan de f y, en cada caso, calcular $dim\ ker(f - \lambda Id)$.

Ejercicio 5.

Determinar en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$ la forma canónica de Jordan de la matriz con coeficientes reales

$$A = \begin{pmatrix} 5 & a & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Hallar, en cada caso, una base de Jordan.

2 TEÓRICOS.

Ejercicio 6.

Sea A la matriz de $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ formada íntegramente por unos. Calcular los polinomios característico y mínimo de A. Probar que A es diagonalizable y encontrar una matriz diagonal D y una invertible M tales que $A = MDM^{-1}$.

Ejercicio 7.

Sea $e_1, \ldots, e_n$ una base del espacio vectorial E y $f \in End(V)$ tal que

$$f(e_1) = \ldots = f(e_n) = \sum_{i=1}^{n} a^i e^i$$

Demostrar que f es diagonalizable si y sólo si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a^i \neq 0$.

Ejercicio 8.

Demostrar que $f \in End_{\mathbb{C}(V)}$ es diagonalizable si y sólo si todo subespacio invariante por f admite un complementario también invariante por f.

Ejercicio 9.

Sea $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ el endomorfismo que hace corresponder $f(p) = p + p'$ a cada polinomio real p de grado menor que 3. a) Encontrar la forma canónica de Jordan de f. b) Demostrar que f^{-1} es una expresión polinómica en f. c) Encontrar la matriz de f^{-1} en la base $1, x, x^2$. (Indicación: utilizar b)).