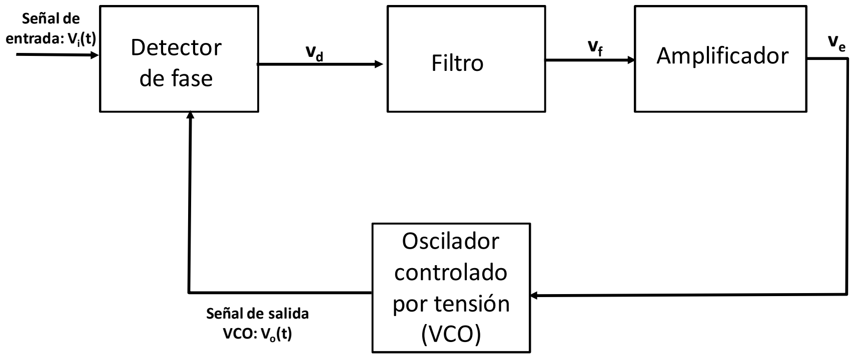
SISTEMAS ELECTRÓNICOS

Grados en Ingeniería de Sistemas de Comunicaciones, Sistemas Audiovisuales, Telemática y Tecnologías de Telecomunicación

SOLUCIONES de Ejercicios Propuestos Tema 7: “PLLs ”

EJERCICIO 1

En el esquema de la figura se representa el diagrama de bloques de un PLL,

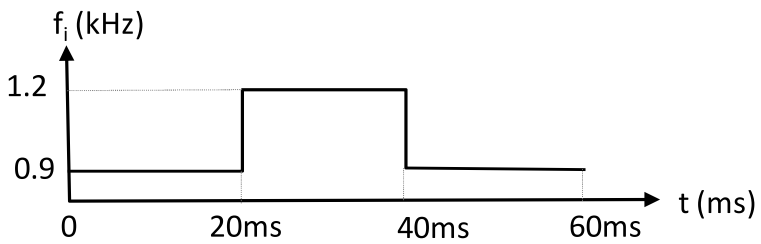


Datos:

- Función de transferencia del filtro, F(s) =1
- Frecuencia de oscilación libre del VCO, f_{fr} = 1kHz
- Ganancia del VCO, $K_o = 4\pi\cdot 10^3$ (rad/s)/V
- Ganancia del detector de fase (célula de Gilbert), $K_d = 1/(4\pi)$ V/rad
- Ganancia del amplificador, A_V = 1

Se pide:

1. Calcule el margen de frecuencias, f_i, de la señal de entrada, v_i, para el que el PLL permanece enganchado.
2. Obtenga la tensión de salida del amplificador, v_e, para los siguientes valores de frecuencia de v_i, f_{i1} =900Hz y f_{i2} = 1.2kHz. Obtenga los desfases ($\phi_{\varepsilon 1}$ y $\phi_{\varepsilon 2}$) entre v_i y v_o en los dos casos anteriores.
3. Represente la evolución temporal de v_e, si la señal de entrada, v_i, es una señal sinusoidal cuya frecuencia evoluciona como se representa en la siguiente gráfica:



4. Obtenga la función de transferencia, $v_e/\Delta_{\omega i}$ (jω), cuando el PLL está enganchado y represéntela gráficamente, en módulo y fase.
5. Represente la evolución temporal de la tensión v_e, si la entrada está modulada en frecuencia de la siguiente forma:

$$v_i(t)= \text{sen}\,\{2\pi\cdot[10^3 +\cdot 200\cdot \text{sen}(2\pi\cdot 160\cdot t)]\cdot t\}$$

SOLUCIÓN:

1. Calcule el margen de frecuencias, f_i, de la señal de entrada, v_i, para el que el PLL permanece enganchado.

Como el detector de fase es una célula de Gilbert:

$$v_d = K_d\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \pm\phi_{\varepsilon m\acute{a}x} = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow \pm\Delta\omega_L = \pm\frac{\pi}{2}\cdot K_d\cdot A_V\cdot K_o = \pm\frac{\pi}{2}\cdot 10^3\left[\frac{rad}{s}\right] \Rightarrow \pm\Delta f_L = 250Hz$$

Como la frecuencia central del VCO (oscilación libre) es 1KHz, el rango de frecuencias de v_i para el que el PLL permanece enganchado es:

$$f_{iLm\acute{a}x} = f_{fr} + \Delta f_L = 1kHz + 250Hz = 1.25kHz$$
$$f_{iLm\acute{i}n} = f_{fr} - \Delta f_L = 1kHz - 250Hz = 750Hz$$

2. Obtenga la tensión de salida del amplificador, v_e, para los siguientes valores de frecuencia de v_i, f_{i1} =900Hz y f_{i2} = 1.2kHz. Obtenga los desfases ($\phi_{\varepsilon 1}$ y $\phi_{\varepsilon 2}$) entre v_i y v_o en los dos casos anteriores.

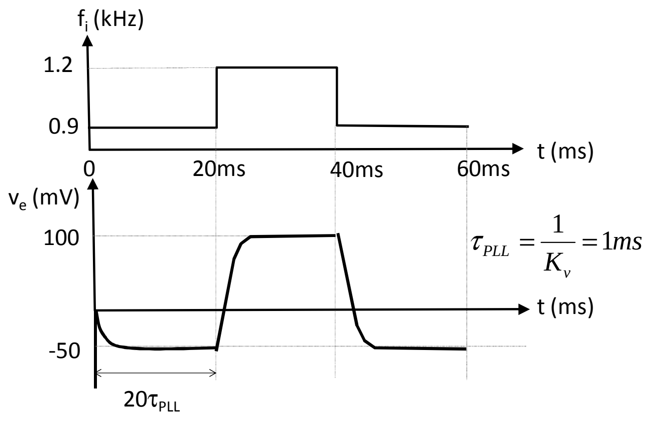
Las dos frecuencias están dentro del margen de enganche del PLL (apartado 1), por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l}\omega_i = \omega_o \\ \omega_o = \omega_{fr} + K_o\cdot v_e\end{array}\right\} \Rightarrow v_e = \frac{\omega_i - \omega_{fr}}{K_o} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f_{i1} = 900Hz \Rightarrow v_{e1} = \dfrac{2\pi\cdot 900 - 2\pi\cdot 1000}{4\pi\cdot 10^3} = -50mV \\ f_{i2} = 1.2kHz \Rightarrow v_{e2} = \dfrac{2\pi\cdot 1.2k - 2\pi\cdot 1k}{4\pi\cdot 10^3} = 100mV\end{array}\right.$$

El desfase para entre v_i y v_b para cada uno de los casos anteriores será:

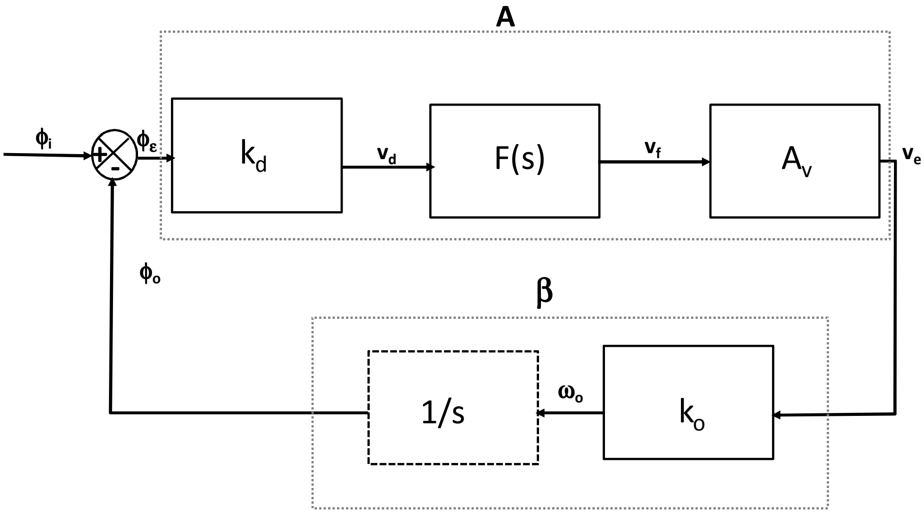
$$\left.\begin{array}{l} v_d = K_d\left(\phi_\varepsilon - \dfrac{\pi}{2}\right) \\ v_e = v_d\cdot F(s)\cdot A_V = v_d\end{array}\right\} \Rightarrow \phi_\varepsilon = \frac{v_e}{K_d} + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \phi_{\varepsilon 1} = \dfrac{v_{e1}}{1/4\pi} + \dfrac{\pi}{2} = +0.3\pi = +0.94rad \Rightarrow \phi_{\varepsilon 1} = +54^o \\ \phi_{\varepsilon 2} = \dfrac{v_{e2}}{1/4\pi} + \dfrac{\pi}{2} = +0.9\pi = +2.83rad \Rightarrow \phi_{\varepsilon 2} = +162^o\end{array}\right.$$

3. Represente la evolución temporal de v_e, si la señal de entrada, v_i, es una señal sinusoidal cuya frecuencia evoluciona como se representa en la siguiente gráfica:



4. Obtenga la función de transferencia, $v_e/\Delta_{\omega i}$ (jω), cuando el PLL está enganchado y represéntela gráficamente, en módulo y fase.

Para obtener la función de transferencia, el equivalente del PLL en estado de enganche, es:



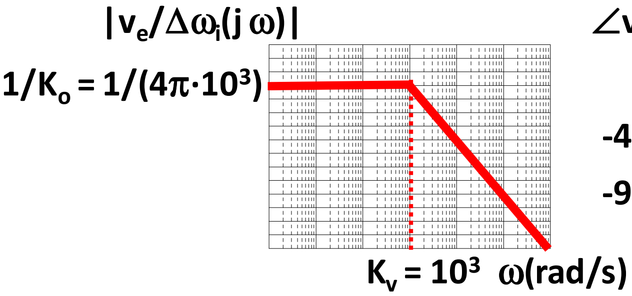
Al ser un sistema con realimentación negativa se tiene:

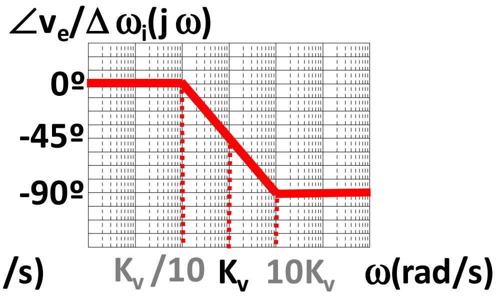
$$\frac{v_e}{\phi_i}(s) = \frac{A}{1 + A \cdot \beta} = \frac{k_d \cdot F(s) \cdot A_v}{1 + k_d \cdot F(s) \cdot A_v \cdot k_o \cdot \frac{1}{s}} \Rightarrow \frac{v_e}{\Delta\omega_i}(s) = \frac{k_d \cdot F(s) \cdot A_v}{s + k_d \cdot F(s) \cdot A_v \cdot k_o}$$

Para F(s) = 1 y con $k_v = (k_d \cdot k_o \cdot A_v)$, nos queda:

$$\frac{v_e}{\Delta\omega_i}(s) = \frac{1}{k_o} \cdot \frac{k_v}{s + k_v} = \frac{1}{4\pi \cdot 10^3} \cdot \frac{10^3}{s + 103}$$

Por lo tanto, la representación de la respuesta en frecuencia (asintótica) del PLL queda como sigue:





5. Represente la evolución temporal de la tensión v_e, si la entrada está modulada en frecuencia de la siguiente forma:

$v_i(t)$= sen {2π·[10^3 +·200·sen(2π·160·t)]·t}

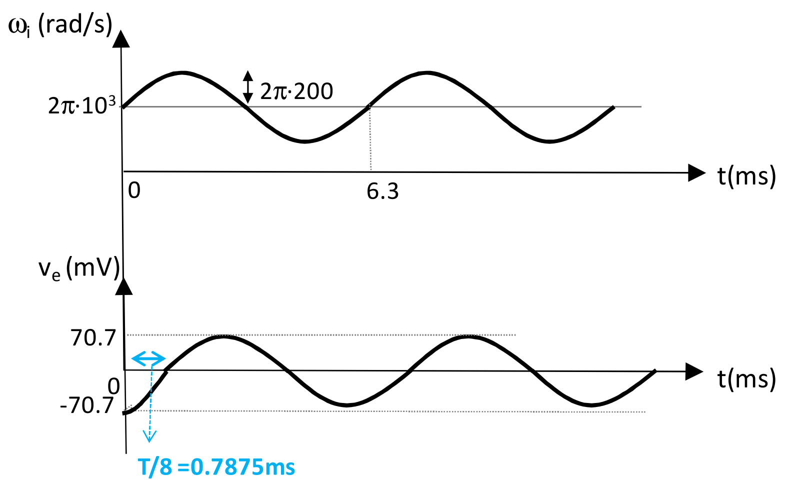
6.

$$\Rightarrow \omega_i(t) = 2\pi\cdot 10^3 + 2\pi\cdot 200\cdot sen(2\pi\cdot 160\cdot t) \rightarrow \begin{cases} f_{imáx} = 1.2kHz < f_{iLmáx}(1.25kHz) \\ f_{imín} = 800Hz > f_{iLmín}(750Hz) \end{cases}$$

PLL en estado de enganche:

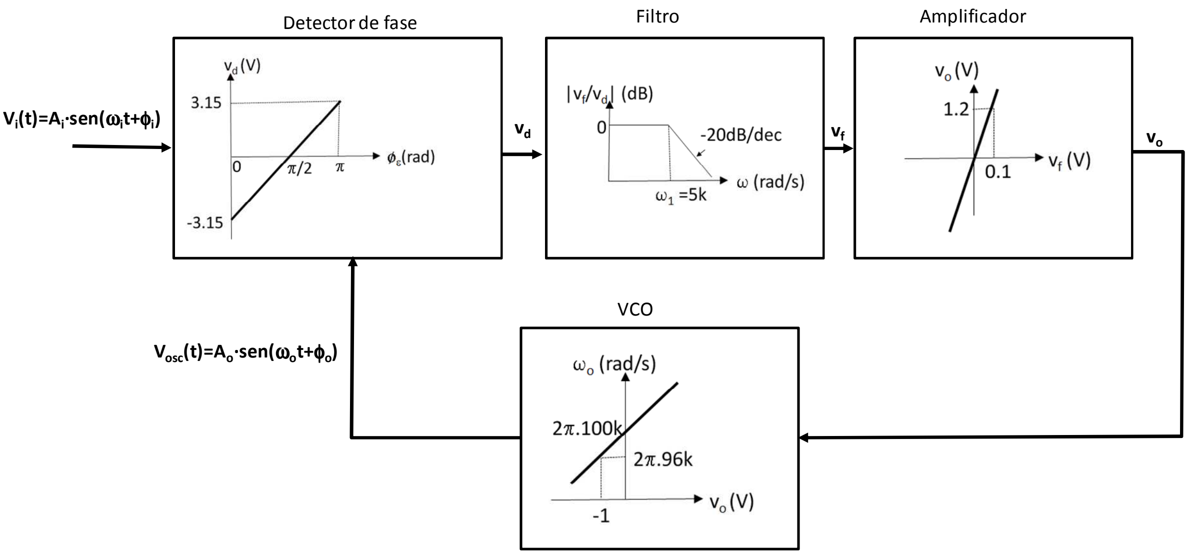
$$v_e(t) = \left|\frac{v_e}{\Delta\omega_i}\right|_{\omega=2\pi\cdot 160\cong 10^3} \cdot |\Delta\omega_i| \cdot sen\left[2\pi\cdot 160\cdot t + \angle \frac{v_e}{\Delta\omega_i}\Big|_{\omega=10^3}\right]$$

$$\Rightarrow v_e(t) = \left(\frac{1}{4\pi\cdot 10^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot 2\pi 200 \cdot sen\left(2\pi\cdot 160\cdot t - \frac{\pi}{4}\right) = 70.7mV\cdot sen\left(2\pi\cdot 160\cdot t - \frac{\pi}{4}\right)$$



EJERCICIO 2

En la figura se representa el diagrama de bloques de un PLL de orden 2, con la representación gráfica de la función de transferencia de cada uno de los bloques.



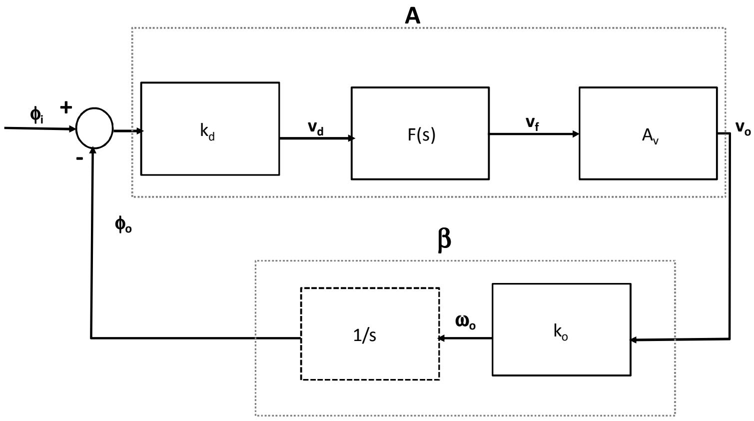
Se pide:

1. Obtenga la función de transferencia del PLL ($v_o/\Delta\omega_i$ (s)) y determine el valor del coeficiente de amortiguamiento (ξ) y de la frecuencia natural (ω_n).
2. Represente gráficamente la respuesta en frecuencia del PLL ($v_{o\Delta}/\omega_i$ ($j\omega$)), en módulo y fase.
3. Represente gráficamente, en función del tiempo, la variación de la frecuencia angular, ω_i, de la señal de entrada del PLL y la variación de v_o, si la señal de entrada del PLL es $v_i(t)$= 5.sen $\{2\pi\cdot[100k +\cdot 10k\cdot sen(2\pi\cdot 100\cdot t)]\cdot t\}$
   No olvide acotar los valores significativos en todos los ejes e incluir todos los cálculos para la determinación de dichos valores.

SOLUCIÓN:

1. **Obtenga la función de transferencia del PLL (v_o/ω_i (s)) y determine el valor del coeficiente de amortiguamiento (ξ) y de la frecuencia natural (ω_n).**

Para obtener la función de transferencia, el equivalente del PLL en estado de enganche, es:



Al ser un sistema con realimentación negativa se tiene:

$$\frac{v_o}{\phi_i}(s) = \frac{A}{1+A\cdot\beta} = \frac{k_d \cdot F(s)\cdot A_v}{1+k_d \cdot F(s)\cdot A_v \cdot k_o \cdot \frac{1}{s}} \Rightarrow \frac{v_o}{\omega_i}(s) = \frac{k_d \cdot F(s)\cdot A_v}{s+k_d \cdot F(s)\cdot A_v \cdot k_o}$$

Donde, de las funciones de transferencia del diagrama de bloques del PLL dado en el enunciado, se obtiene:

- Ganancia del detector de fase: $k_d = \frac{6.30V}{\pi rad} = 2\left[\frac{V}{rad}\right]$
- Función de transferencia del filtro: $F(s) = \frac{\omega_1}{s+\omega_1} = \frac{1}{1+\frac{s}{\omega_1}}$
- Ganancia del amplificador: $A_v = \frac{1.2V}{0.1V} = 12$
- Frecuencia de oscilación libre del VCO: $\omega_{fr} = 2\pi\cdot 100k\left[\frac{rad}{s}\right]$
- Ganancia del VCO: $k_o = \frac{2\pi\cdot 96k - 2\pi\cdot 100k}{-1} = 8\pi\cdot 10^3\left[\frac{rad/s}{V}\right]$

Sustituyendo en la función de transferencia, con $k_v = k_d \cdot k_o \cdot A_v$, se tiene:

$$\frac{v_o}{\omega_i}(s) = \frac{1}{k_o}\cdot\frac{\omega_1\cdot k_v}{s^2 + s\omega_1 + \omega_1\cdot k_v}$$

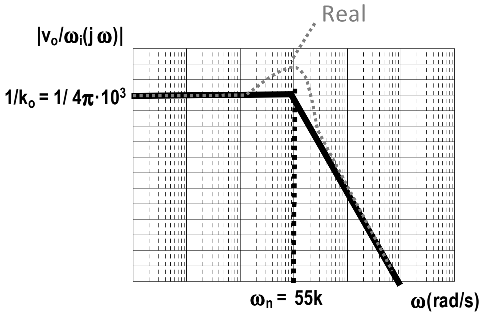
Identificando con el denominador genérico de un sistema de 2º orden: $s^2 + s\,2\cdot\zeta\cdot\omega_n + \omega_n^2$, nos queda:

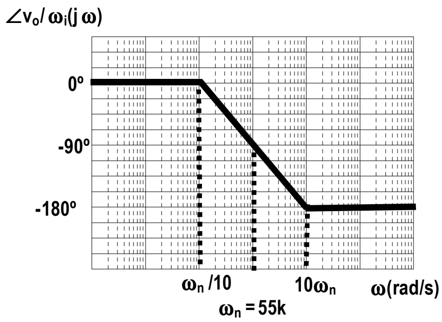
$$\omega_n = \sqrt{\omega_1\cdot k_v} = \sqrt{5\cdot 10^3 \cdot 6\cdot 10^5} \cong 55\frac{krad}{s}$$

$$\zeta = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{\omega_1}{k_v}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{5\cdot 10^3}{6\cdot 10^5}} \cong 0.046 < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

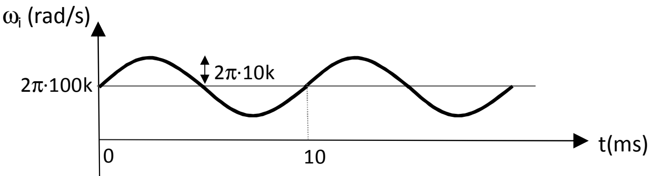
2. **Represente gráficamente la respuesta en frecuencia del PLL (v_o/ω_i (jω)), en módulo y fase.**

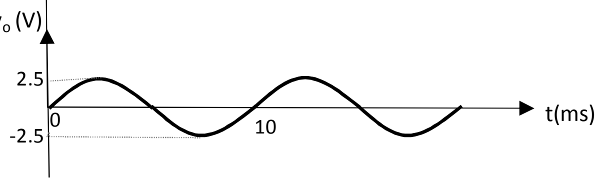
A partir de la función de transferencia obtenida en apartado anterior, la representación de la respuesta en frecuencia del PLL queda como sigue:





3. **Represente gráficamente, en función del tiempo, la variación de la frecuencia angular, ω_i, de la señal de entrada del PLL y la variación de v_o, si la señal de entrada del PLL es $v_i(t)$= 5.sen {2π·[100k +·10k·sen(2π·100·t)]·t} No olvide acotar los valores significativos en todos los ejes e incluir todos los cálculos para la determinación de dichos valores.**





v_o será una señal sinusoidal de 100Hz y:

$$|v_o| = |\omega_i| \cdot \left|\frac{v_o}{\omega_i}\right|_{2\pi\cdot 100Hz} = 2\pi \cdot 10k \cdot \frac{1}{4\pi \cdot 10^3} = 2.5V$$

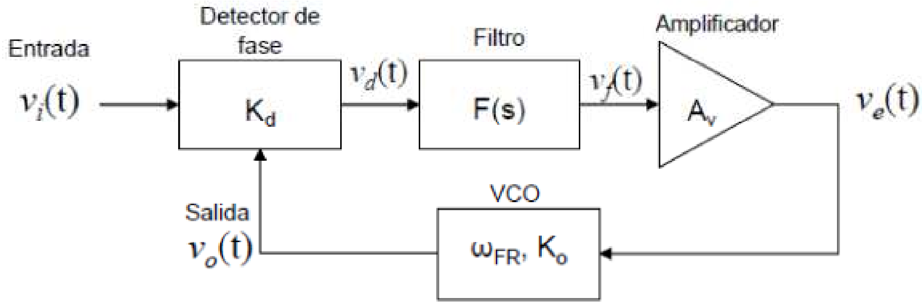
$$\angle v_o = \angle \omega_i + \angle \frac{v_o}{\omega_i}_{\;2\pi\cdot 100Hz} = 0^o$$

Y de valor medio:

$$v_{omed} = \frac{1}{k_o}\left(\omega_{imed} - \omega_{fr}\right) = 0$$

EJERCICIO 3

En el esquema de la figura se representa el diagrama de bloques de un PLL:



Datos:

- Función de transferencia del filtro: F(s)=1.
- Función de transferencia del amplificador: A_v=1.
- Cuando el PLL está enganchado el detector de fase (célula de Gilbert) se considera lineal, siendo su función de transferencia: Kd=1/(2π) V/rad.
- La relación entrada-salida del oscilador controlado por tensión (VCO) se considera también lineal y responde a: $\omega_o=\omega_{FR}+K_o\cdot v_e$ [pulsación de oscilación libre: $\omega_{FR}=2\pi\cdot 100$krad/s; $K_o=2\pi\cdot 100$(krad/s)/V]

Se pide (suponiendo que el PLL permanece enganchado):

1. Obtener la frecuencia de oscilación libre, f_{FR}, del VCO.
2. Obtener la tensión de salida del amplificador, v_e, para los siguientes valores de frecuencia de la señal de entrada v_i: f_{i1}=100kHz y f_{i2}=125kHz.
3. Represente la evolución temporal de la frecuencia de la señal de entrada f_i y de la tensión v_e, si:
   - ✓ $vi=2\cdot sen(2\pi\cdot 100\cdot 10^3\cdot t)$ para 0<t<0,1ms
   - ✓ $vi=2\cdot sen(2\pi\cdot 125\cdot 10^3\cdot t)$ para 0,1ms<t<0,2ms
   - ✓ $vi=2\cdot sen(2\pi\cdot 100\cdot 10^3\cdot t)$ para 0,2ms<t<0,25ms
   - ✓ $vi=2\cdot sen(2\pi\cdot 125\cdot 10^3\cdot t)$ para 0,25ms<t.
4. Diseñe una modificación del PLL (valores de los parámetros característicos del PLL o añadirle los elementos necesarios) para que la tensión de salida del amplificador evolucione entre 0V y 3V.

SOLUCION

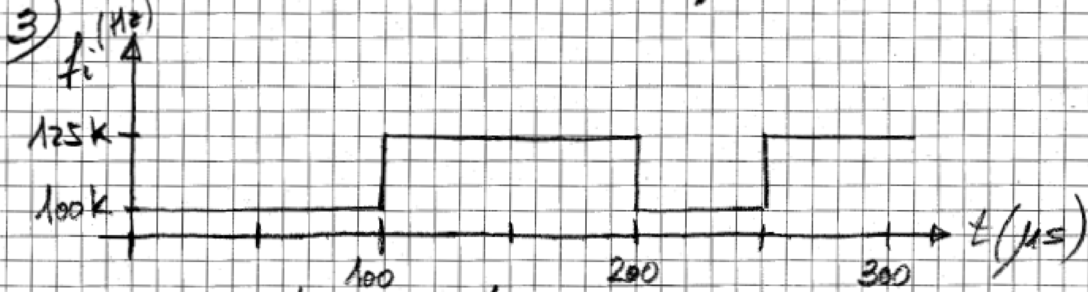
1 1) $\underline{f_{FR}} = \frac{\omega_{FR}}{2\pi} = \underline{100\,kHz}$

2) $f_{i1} = 100\,kHz \Rightarrow 2\pi\, 100k \frac{rad}{s} = 2\pi\, 100k \frac{rad}{s} + K_0 v_e \Rightarrow$

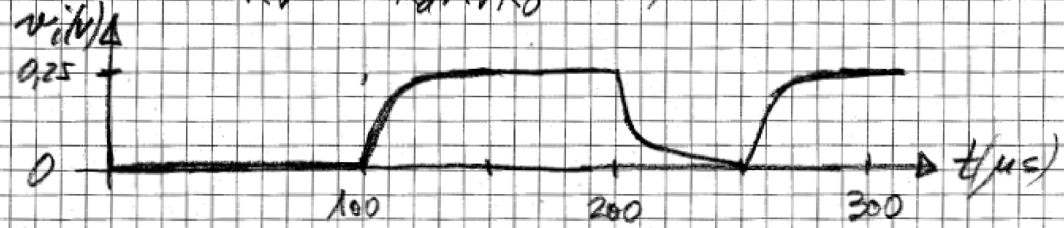
4 $\Rightarrow K_0 v_e = 0 \Rightarrow \boxed{v_e = 0\,V}$

$f_{i2} = 125\,kHz \Rightarrow \boxed{v_e = \frac{2\pi 25\, k\, rd/s}{2\pi 100\, \frac{k\, rd/s}{V}}} = \boxed{0{,}25\,V}$

3)

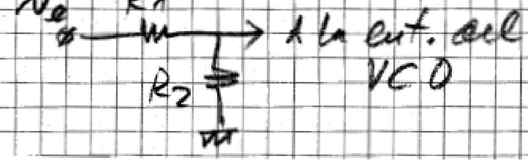


3 $\tau_{PLL} = \frac{1}{K_V} = \frac{1}{K_d A_V K_0} = 10\,\mu s$



4) Colocar un atenuador entre la salida del amplificador y la entrada del VCO, de ganancia:

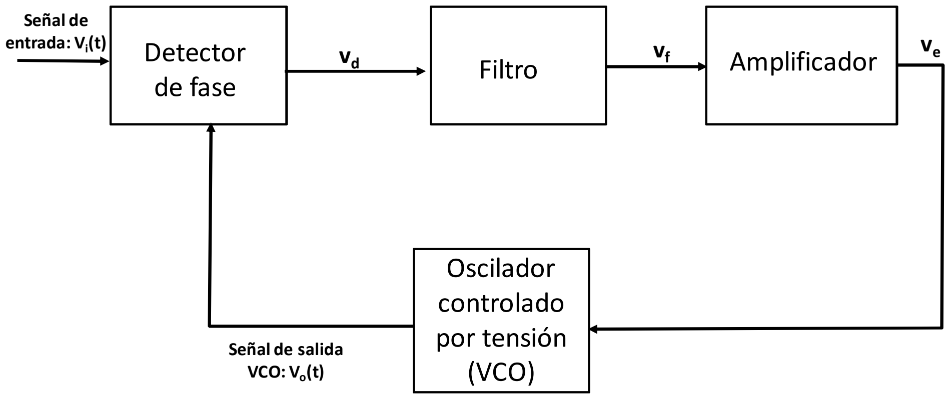
2 $A_{At} = \frac{0{,}25}{3} = \frac{1}{12}$



por ejemplo con $R_1 = 11k$; $R_2 = 1k$

EJERCICIO 4

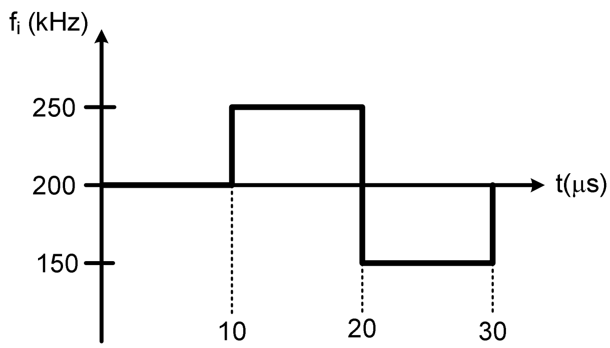
En el esquema de la figura se representa el diagrama de bloques de un PLL,



Datos: *Función de transferencia del filtro F(s) =1. Frecuencia de oscilación libre del VCO* f_{fr} *= 200kHz. Ganancia del VCO* $K_o = 2\pi\cdot 10^5$ *(rad/s)/V. Ganancia del detector de fase (célula de Gilbert)* $K_d = 2/\pi$ *V/rad. Ganancia del amplificador* $A_V = 1$.

Se pide:

6. Calcule el margen de frecuencias, f_i, de la señal de entrada, V_i, para el que el PLL permanece enganchado.
7. Obtenga la tensión de salida del amplificador, V_e, para los siguientes valores de frecuencia de V_i, f_{i1} = 150kHz y f_{i2} = 250kHz.
8. Represente la evolución temporal de la tensión V_e si la frecuencia de la señal de entrada, f_i, evoluciona como se representa en la siguiente gráfica. Justifique su respuesta usando la constante de tiempo del PLL.



SOLUCION

1) Como el detector de fase es una célula de Gilbert:

$v_d = k_d\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \pm\phi_{max} = \pm\frac{\pi}{2}$

$\pm\Delta\omega_L = \pm\frac{\pi}{2} \cdot k_d \cdot A_v \cdot k_o = \pm 2\pi \cdot 10^5 \ \frac{rad}{s} \rightarrow$

$\rightarrow \boxed{\pm\Delta f_L = 100\,kHz}$

Como la frecuencia central del VCO (oscilación libre) es 200kHz, el rango de frecuencias de v_i para el que el PLL permanezca enganchado es:

$\underline{f_{iCMAX}} = f_{fr} + \Delta f_L = 200\,kHz + 100\,kHz = \underline{\underline{300\,kHz}}$

$\underline{f_{iCMIN}} = f_{fr} - \Delta f_L = 200\,kHz - 100\,kHz = \underline{\underline{100\,kHz}}$

2) Las dos frecuencias están dentro del margen de enganche del PLL (apartado 1), por lo tanto:

$$\left.\begin{aligned} \omega_i &= \omega_o \\ \omega_o &= \omega_{fr} + k_o \cdot v_e \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_e = \frac{\omega_i - \omega_{fr}}{k_o}$$

2)

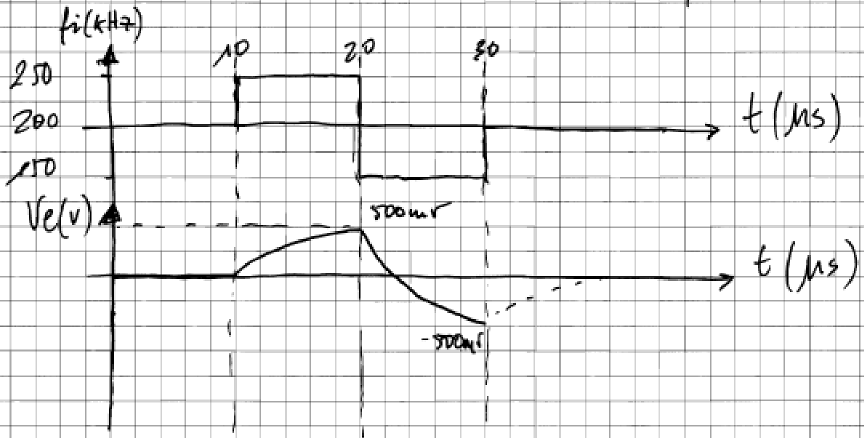
$fi_1 = 150\,kHz \longrightarrow \underline{\underline{Ve_1}} = \dfrac{2\pi \cdot 150kHz - 2\pi \cdot 200kHz}{2\pi \cdot 10^5} = \underline{\underline{-500mV}}$

$fi_2 = 250\,kHz \longrightarrow \underline{\underline{Ve_2}} = \dfrac{2\pi \cdot 250kHz - 2\pi \cdot 200kHz}{2\pi \cdot 10^5} = \underline{\underline{+500mV}}$

$\boxed{Ve_1 = -500mV}$

$\boxed{Ve_2 = +500mV}$

3) Se trata de un PLL de primer orden:



Si calculamos la constante de tiempo del PLL =

$\underline{\underline{\tau_{PLL}}} = \dfrac{1}{kv} = \dfrac{1}{kd \cdot \Delta v \cdot k_0} = \underline{\underline{2{,}5\,\mu s}}$ $\boxed{10\mu s > 3\,\tau_{PLL}}$

EJERCICIO 6

En el esquema de la Figura 1 se representa el diagrama de bloques de un PLL,

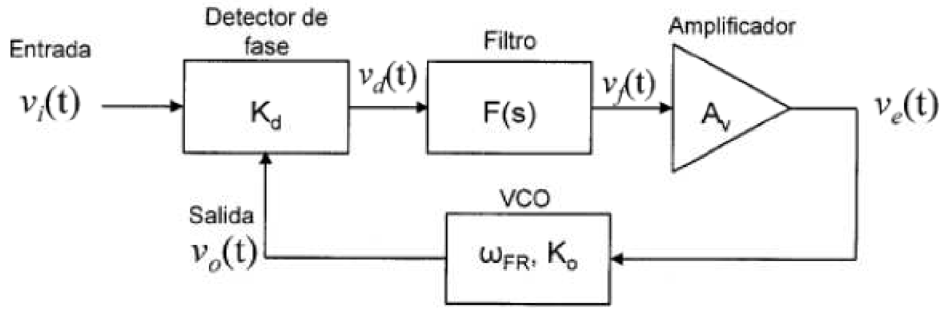


Figura 1

Datos:

- Función de transferencia del filtro, F(s) = 1.
- Dentro del margen de enganche, el detector de fase se considera lineal. La ganancia del detector de fase: Kd = 1/(2π) V/rad
- La relación entrada - salida del oscilador controlado por tensión (VCO) es también lineal y responde a:

  $$\omega_o = \omega_{FR} + K_o \cdot V_e$$

  ω_{FR} pulsación de oscilación libre
- La respuesta que se espera para el PLL, vista como la variación de la tensión de entrada al VCO, $v_e(t)$, ante la variación de la tensión de entrada, $v_i(t)$, se representa en la Figura 2:

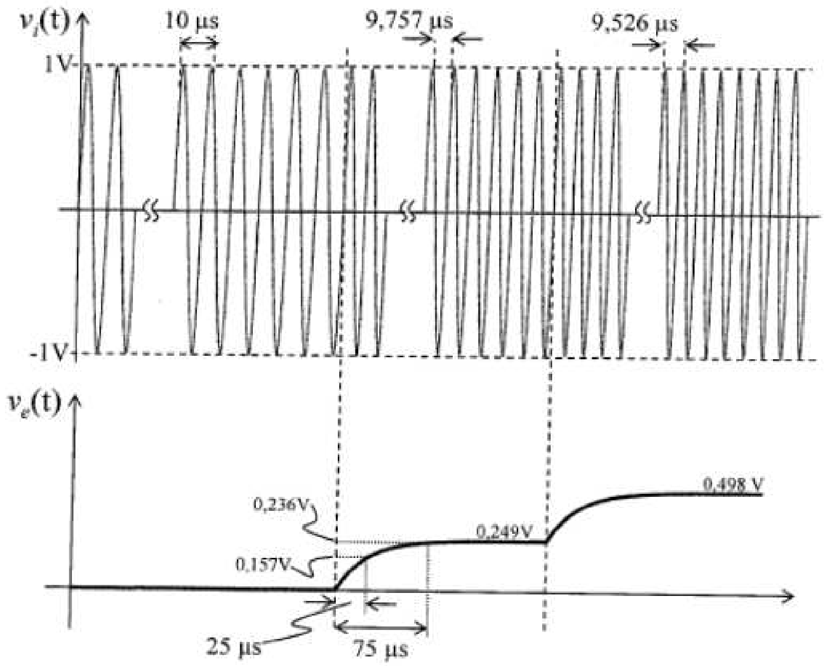


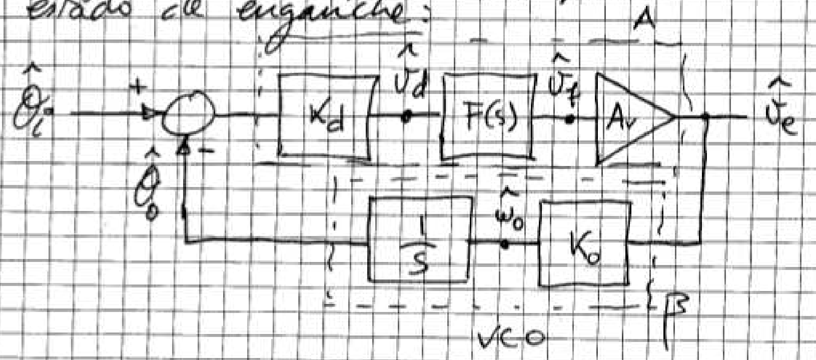
Figura 2

Se pide, suponiendo que el PLL permanece enganchado:

1. Dibujar el diagrama de bloques en pequeña señal y calcular la función de transferencia $\hat{v}_e/\hat{\theta}_i$ (tensión a la entrada del VCO respecto de la fase de la señal de entrada) en función de las constantes: Kd, Ko (ganancia VCO) y Av (ganancia del amplificador).
2. Determine la frecuencia de oscilación libre del VCO, fo, y su ganancia, Ko.
3. Diseñe el valor de la ganancia del amplificador, para que la respuesta del PLL sea la indicada en la figura 2.
4. Obtenga y represente gráficamente la respuesta en frecuencia del PLL ($\hat{v}_e/\hat{\omega}_i\,(j\omega)$), en módulo y fase.

SOLUCION

1) Diagrama de bloques en pequeña señal en estado de enganche:



Función de transferencia $\frac{\hat{v}_e}{\hat{\theta}_i}(s)$

$$\frac{\hat{v}_e}{\hat{\theta}_i} = \frac{A}{1 + A \cdot \beta} = \frac{K_d \cdot F(s) \cdot A_v}{1 + K_d \cdot F(s) \cdot A_v \cdot \frac{1}{s} \cdot K_o}$$

dado que $F(s) = 1$

$$\frac{\hat{v}_e}{\hat{\theta}_i} = \frac{K_d \cdot A_v}{1 + K_d \cdot A_v \cdot K_o \cdot \frac{1}{s}} = \frac{1}{K_o} \cdot \frac{s}{1 + \frac{1}{K_d \cdot A_v \cdot K_o} \cdot s}$$

2) En la Figura 2 se puede observar que cuando la tensión de entrada al VCO son 0V, la tensión de entrada $v_i(t)$ presentaba una frecuencia de 100 KHz.

$$0V \longrightarrow \boxed{VCO} \longrightarrow f_{FR}$$ (frecuencia oscilación libre)

Por otro lado en estado de enganche se cumple

$$f_i = f_{FR} \Rightarrow f_{FR} = \frac{1}{10\,\mu s} = 100 \text{ KHz}$$

Para cualquiera de los dos regímenes permanente que se observan en la figura 2, en estado de enganche, se cumple:

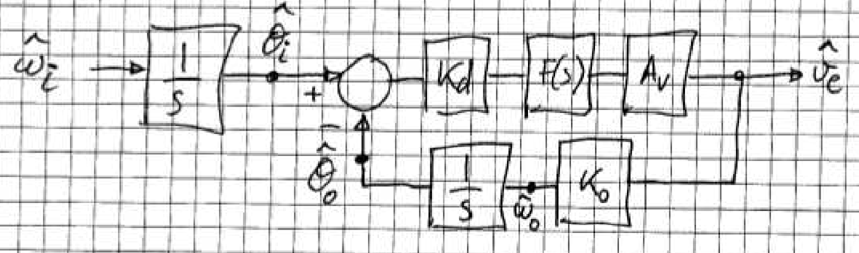
$$\omega_0 = \omega_{FR} + K_0 \cdot V_e \quad \text{ó bien}$$

$$f_0 = f_{FR} + \frac{1}{2\pi} \cdot K_0 \cdot V_e$$

$$K_0 = \frac{2\pi\left(f_0 - f_{FR}\right)}{V_e} = \frac{2\pi\left(\frac{1}{9'757\,\mu s} - 100 \text{ KHz}\right)}{0'249 \text{ V}}$$

$$K_0 = 2\pi \cdot 10^4 \frac{\text{rad/s}}{\text{V}} = 2\pi \cdot 10 \frac{\text{KHz} \cdot \text{rad}}{\text{V}}$$

3) La función de transferencia $\frac{\hat{v}_e}{\hat{\omega}_i}(s)$ se considera la respuesta del PLL. Ésta se puede obtener teniendo en cuenta:



$$\frac{\hat{v}_e}{\hat{\omega}_i} = \frac{\hat{v}_e}{\hat{\theta}_i}\cdot\frac{\hat{\theta}_i}{\hat{\omega}_i} = \frac{1}{\cancel{s}}\cdot\frac{1}{K_o}\cdot\frac{\cancel{s}}{1+\frac{1}{K_d\cdot A_v\cdot K_o}\cdot s}$$

$$\frac{\hat{v}_e}{\hat{\omega}_i}(s) = \frac{1}{K_o}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{K_d\cdot A_v\cdot K_o}\cdot s} = G_{ain}\cdot\frac{1}{1+\tau\cdot s}$$

identificando términos $\tau = \frac{1}{K_d\cdot K_o\cdot A_v}$

De la figura 2 se deduce que para un $t = 25\,\mu s$, la respuesta ha alcanzado $0'63 \times 0'249V = 0'157\,V$ es decir el 63% del régimen permanente. Por tanto $\tau = 25\,\mu s$

$$\tau = \frac{1}{K_d \cdot K_o \cdot A_v} \quad ; \quad A_v = \frac{1}{K_d \cdot K_o \cdot \tau}$$

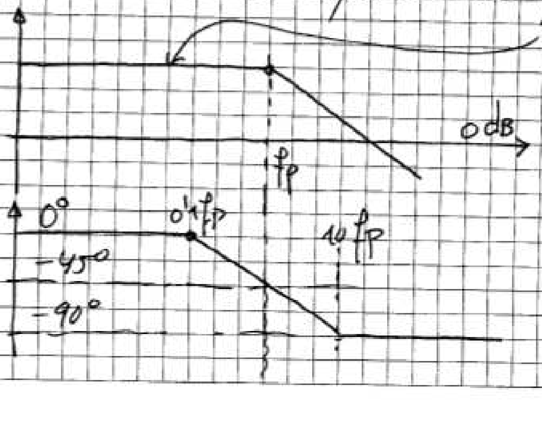
$$A_v = \frac{1}{\frac{1}{2\pi}\frac{\cancel{V}}{\cancel{rad}} \cdot 2\pi \cdot 10^4 \cdot \frac{\cancel{rad/s}}{\cancel{V}} \cdot 25 \cdot 10^{-6}\,\cancel{s}} = \underline{\underline{4}}$$

4) $$\frac{\hat{v}_e}{\hat{\omega}_i}(j\omega) = \frac{1}{K_o} \cdot \frac{1}{1 + j\tau \cdot \omega}$$

$$\frac{\hat{v}_e}{\hat{\omega}_i}(jf) = \frac{1}{K_o} \cdot \frac{1}{1 + j\, f/f_p} \; ; \text{ donde } f_p = \frac{1}{2\pi\tau}$$

$$f_p = \frac{1}{2\pi \cdot 25\,\mu s} = 6'36 \text{ KHz}$$

Por tanto la respuesta en frecuencia resulta

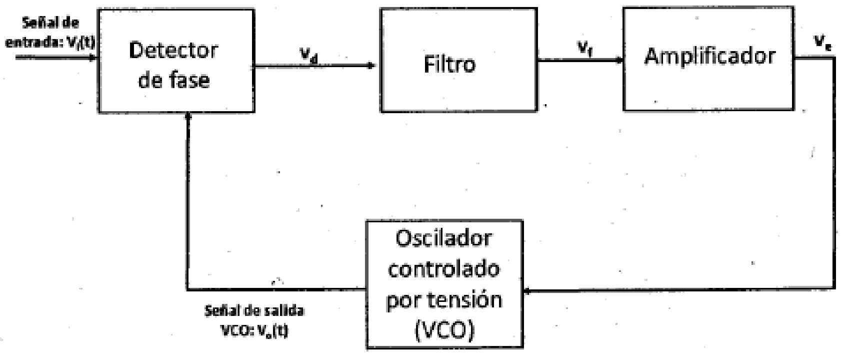


$20 \cdot \log\left(\frac{1}{K_o}\right) = -96$ dBV??

Para expresarlo en dB habría que referirlo a $1 \frac{V}{rad/s}$

EJERCICIO 7

En el esquema de la figura se representa el diagrama de bloques de un PLL,

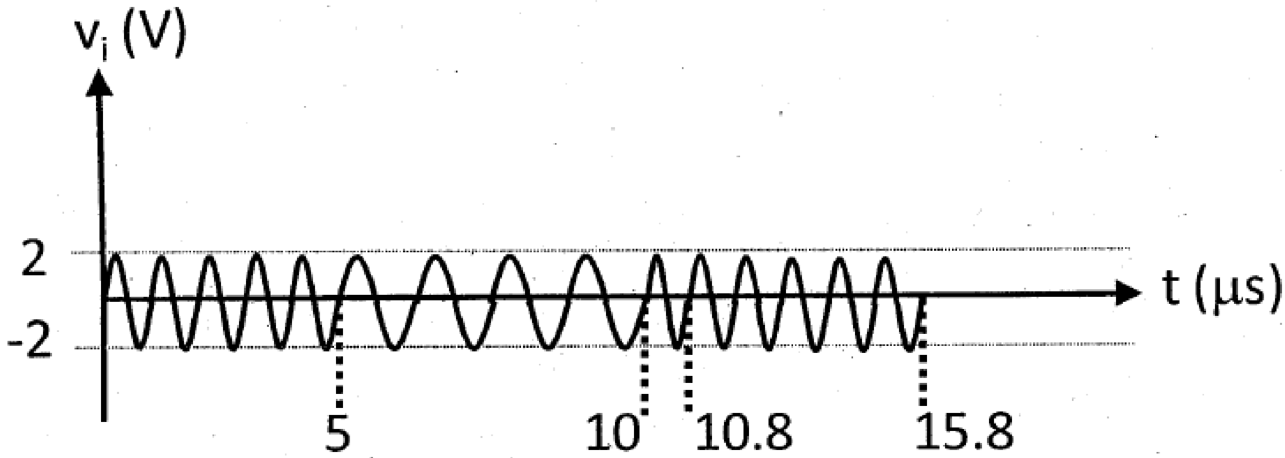


Datos:

- Función de transferencia del filtro, F(s) =1
- Frecuencia de oscilación libre del VCO, f_{fr} = 1MHz
- Ganancia del VCO, $K_o = 4\pi\cdot 10^6$ (rad/s)/V
- Ganancia del detector de fase (célula de Gilbert), $K_d = 2/(4\pi)$ V/rad
- Ganancia del amplificador, $A_V = 1$

Se pide:

1. Calcule el margen de frecuencias, f_i, de la señal de entrada, v_i, para el que el PLL permanece enganchado.
2. Obtenga la tensión de salida del amplificador, v_e, para los siguientes valores de frecuencia de v_i, f_{i1} = 800kHz y f_{i2} = 1.25MHz.
3. Represente la evolución temporal de la frecuencia de la señal de entrada, f_i, y de la tensión v_e, si la señal de entrada, v_i, es una señal sinusoidal que evoluciona como se representa en la siguiente gráfica:



Calcule y señale claramente los valores de v_e en los instantes de tiempo señalados en la gráfica anterior (5μs, 10μs, 10.8μs y 15.8μs)

SOLUCION

1. **Calcule el margen de frecuencias, f_i, de la señal de entrada, v_i, para el que el PLL permanece enganchado.**

Como el detector de fase es una célula de Gilbert:

$$v_d = K_d\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \pm\phi_{emáx} = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow \pm\Delta\omega_L = \pm\frac{\pi}{2}K_d \cdot A_v \cdot K_o = \pm\pi\cdot 10^6\left[\frac{rad}{s}\right] \Rightarrow \pm\Delta f_L = 500kHz$$

Como la frecuencia central del VCO (oscilación libre) es 1MHz, el rango de frecuencias de v_i para el que el PLL permanece enganchado es:

$$f_{iLmáx} = f_{fr} + \Delta f_L = 1MHz + 500kHz = 1.5MHz$$

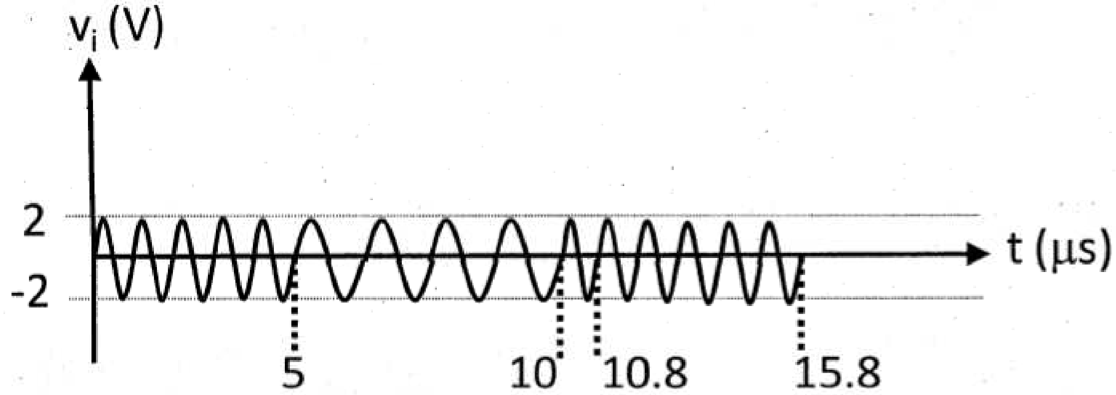
$$f_{iLmin} = f_{fr} - \Delta f_L = 1MHz - 500kHz = 500kHz$$

2. **Obtenga la tensión de salida del amplificador, v_e, para los siguientes valores de frecuencia de v_i, f_{i1} = 800kHz y f_{i2} = 1.25MHz.**

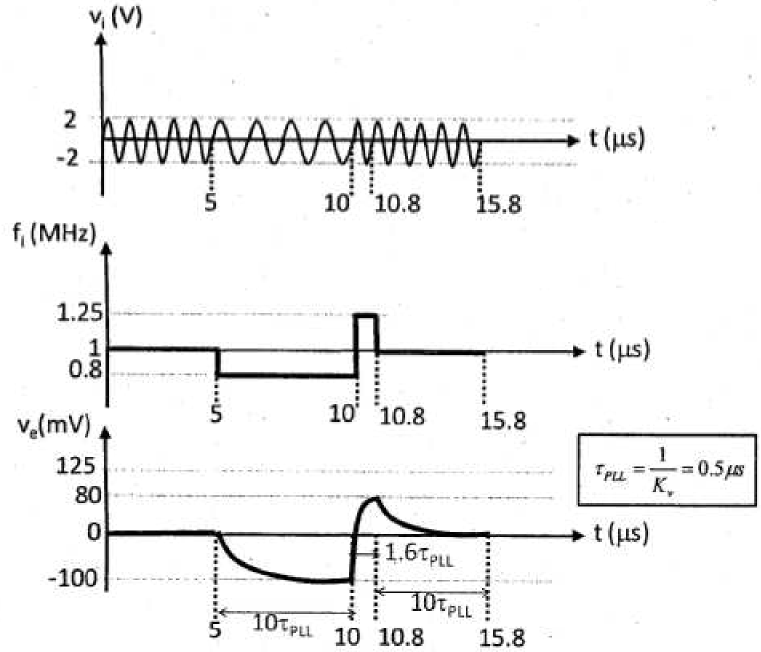
Las dos frecuencias están dentro del margen de enganche del PLL (apartado 1), por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l}\omega_i = \omega_o \\ \omega_o = \omega_{fr} + K_o \cdot v_e\end{array}\right\} \Rightarrow v_e = \frac{\omega_i - \omega_{fr}}{K_o} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f_{i1} = 800kHz \Rightarrow v_{e1} = \dfrac{2\pi\cdot 800k - 2\pi\cdot 1000k}{4\pi\cdot 10^6} = -100mV \\ f_{i2} = 1.25MHz \Rightarrow v_{e2} = \dfrac{2\pi\cdot 1.25M - 2\pi\cdot 1M}{4\pi\cdot 10^6} = 125mV \end{array}\right.$$

3. **Represente la evolución temporal de la frecuencia de la señal de entrada, f_i, y de la tensión v_e, si la señal de entrada, v_i, es una señal sinusoidal que evoluciona como se representa en la siguiente gráfica:**



Calcule y señale claramente los valores de v_e en los instantes de tiempo señalados en la gráfica anterior (5μs, 10μs, 10.8μs y 15.8μs)



Se trata de un PLL de primer orden:

$0 - 5\mu s(10\tau_{PLL}) : f_{i1} = 1MHz = f_{fr} \Rightarrow v_{e1(5\mu s)} = 0$

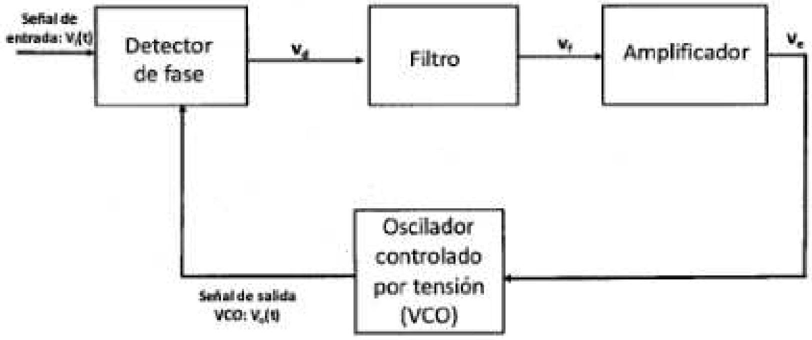
$5\mu s - 10\mu s(10\tau_{PLL}) : f_{i2} = 0.8MHz \Rightarrow v_{e2(10\mu s)} = -100mV$

$10\mu s - 10.8\mu s(1.6\tau_{PLL}) : f_{i3} = 1.25MHz \Rightarrow v_{e3(10.8\mu s)} = 125mV + (-100mV - 125mV)e^{-(10.8\mu s - 10\mu s)/\tau_{PLL}} \cong 80mV$

$10.8\mu s - 15.8\mu s(10\tau_{PLL}) : f_{i3} = 1MHz = f_{fr} \Rightarrow v_{e3(15.8\mu s)} = 0$

EJERCICIO 8

En el esquema de la figura se representa el diagrama de bloques de un PLL,



Datos:

- Función de transferencia del filtro, $F(s) = 2000/(s+2000)$
- Frecuencia de oscilación libre del VCO, f_{fr} = 1kHz
- Ganancia del VCO, $K_o = 4\pi\cdot10^3$ (rad/s)/V
- Ganancia del detector de fase (célula de Gilbert), $K_d = 1/(4\pi)$ V/rad
- Ganancia del amplificador, $A_V = 1$

Se pide:

1. Calcule el margen de frecuencias, f_i, de la señal de entrada, v_i, para el que el PLL permanece enganchado.

2. Obtenga la función de transferencia, $v_e/\Delta\omega_i$ $(j\omega)$, cuando el PLL está enganchado y represéntela gráficamente, en módulo y fase.

3. Represente la evolución temporal de la tensión v_e, si la entrada está modulada en frecuencia de las siguientes formas:

$$3.a)\ v_i(t)= \text{sen}\ \{2\pi\cdot[10^3 + \cdot 200\cdot \text{sen}(2\pi\cdot 22.5\cdot t)]\cdot t\}$$

$$3.b)\ v_i(t)= \text{sen}\ \{2\pi\cdot[10^3 + \cdot 200\cdot \text{sen}(2\pi\cdot 225\cdot t)]\cdot t\}$$

SOLUCION

1. Calcule el margen de frecuencias, f_i, de la señal de entrada, v_i, para el que el PLL permanece enganchado.

Como el detector de fase es una célula de Gilbert:

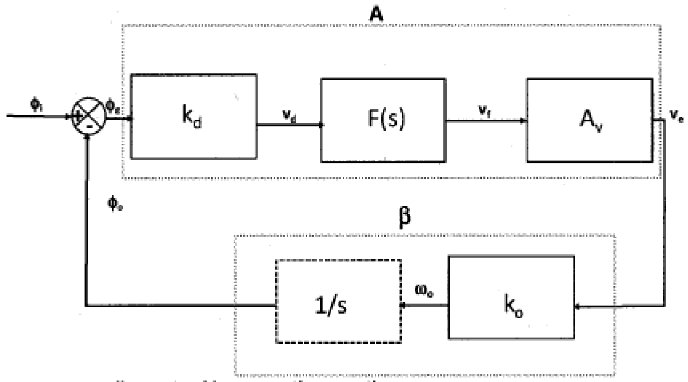
$$v_d = K_d\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \pm\phi_{emáx} = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow \pm\Delta\omega_L = \pm\frac{\pi}{2}\cdot K_d\cdot A_v\cdot K_o = \pm\frac{\pi}{2}10^3\left[\frac{rad}{s}\right] \Rightarrow \pm\Delta f_L = 250Hz$$

Como la frecuencia central del VCO (oscilación libre) es 1KHz, el rango de frecuencias de v_i para el que el PLL permanece enganchado es:

$$f_{iLmáx} = f_{fr} + \Delta f_L = 1kHz + 250Hz = 1.25kHz$$
$$f_{iLmín} = f_{fr} - \Delta f_L = 1kHz - 250Hz = 750Hz$$

2. Obtenga la función de transferencia, $v_e/\Delta\omega_i$ (jω), cuando el PLL está enganchado y represéntela gráficamente, en módulo y fase.

Para obtener la función de transferencia, el equivalente del PLL en estado de enganche, es:



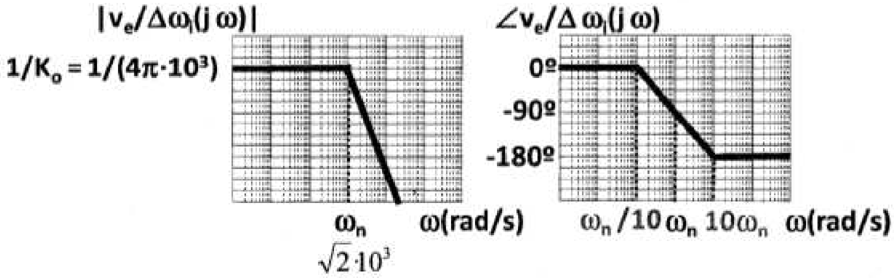
Al ser un sistema con realimentación negativa se tiene:

$$\frac{v_e}{\phi_i}(s) = \frac{A}{1+A\cdot\beta} = \frac{k_d\cdot F(s)\cdot A_v}{1+k_d\cdot F(s)\cdot A_v\cdot k_o\cdot\frac{1}{s}} \Rightarrow \frac{v_e}{\Delta\omega_i}(s) = \frac{k_d\cdot F(s)\cdot A_v}{s+k_d\cdot F(s)\cdot A_v\cdot k_o}$$

Para F(s) = 2000/(s+2000)= $\omega_1/(s+\omega_1)$ y con $k_v=(k_d\cdot k_o\cdot A_v)$, nos queda:

$$\left.\begin{aligned}\frac{v_e}{\Delta\omega_i}(s) &= \frac{1}{K_o}\cdot\frac{\omega_1\cdot K_V}{s^2+\omega_1\cdot s+\omega_1\cdot K_V}\\ T_{generica}(s) &= \frac{a_0}{s^2+2\cdot\xi\cdot\omega_n\cdot s+\omega_n^{\ 2}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}\omega_n &= \sqrt{\omega_1\cdot K_V} = \sqrt{2}\cdot 10^3\, rad/s\\ \xi &= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{\omega_1}{K_V}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Por lo tanto, la representación de la respuesta en frecuencia (asintótica) del PLL queda como sigue:



3. Represente la evolución temporal de la tensión v_e, si la entrada está modulada en frecuencia de las siguientes formas:

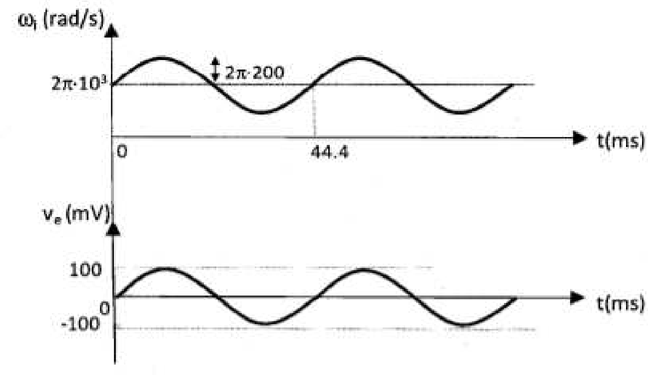
3.a) $v_i(t)$= sen {$2\pi\cdot[10^3 +\cdot 200\cdot sen(2\pi\cdot 22.5\cdot t)]\cdot t$}

$$\Rightarrow \omega_i(t) = 2\pi\cdot 10^3 + 2\pi\cdot 200\cdot sen(2\pi\cdot 22.5\cdot t) \rightarrow \begin{cases} f_{imáx} = 1.2kHz < f_{iLmáx}(1.25kHz) \\ f_{imín} = 800Hz > f_{iLmín}(750Hz) \end{cases}$$

PLL en estado de enganche:

$$v_e(t) = \left|\frac{v_e}{\Delta\omega_i}\right|_{\omega=2\pi\cdot 22.5\cong\sqrt{2}\cdot 10^2} \cdot |\Delta\omega_i|\cdot sen\left[2\pi\cdot 22.5\cdot t + \angle\frac{v_e}{\Delta\omega_i}\bigg|_{\omega=\sqrt{2}\cdot 10^2}\right]$$

$$\Rightarrow v_e(t) = \left(\frac{1}{4\pi\cdot 10^3}\right)\cdot 2\pi 200 \;\cdot sen\left(2\pi\cdot 22.5\cdot t\right) = 100mV\cdot sen\left(2\pi\cdot 22.5\cdot t\right)$$



3.b) $v_i(t)$= sen {2π·[10³ +·200·sen(2π·225·t)]·t}

$$\Rightarrow \omega_i(t) = 2\pi\cdot10^3 + 2\pi\cdot200\cdot sen(2\pi\cdot225 t) \rightarrow \begin{cases} f_{imáx} = 1.2kHz < f_{iL,máx}(1.25kHz) \\ f_{imín} = 800Hz > f_{iL,mín}(750Hz) \end{cases}$$

PLL en estado de enganche:

$$v_e(t) = \left|\frac{v_e}{\Delta\omega_i}\right|_{\omega=2\pi\cdot225\cong\sqrt{2}\cdot10^3} \cdot |\Delta\omega_i| \cdot sen\left[2\pi\cdot225\cdot t + \angle\frac{v_e}{\Delta\omega_i}\Big|_{\omega=\sqrt{2}\cdot10^3}\right]$$

$$\Rightarrow v_e(t) = \left(\frac{1}{4\pi\cdot10^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot2\pi200 \cdot sen\left(2\pi\cdot225\cdot t - \frac{\pi}{2}\right) = 70.7mV\cdot sen\left(2\pi\cdot225\cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$$