Nombre: .... Apellidos: ....

DNI: .... Grado: ....

Examen Final de Cálculo

Grados en Ingeniería

Universidad Miguel Hernández de Elche - Jueves 12 de Septiembre de 2013

Tipo A

INSTRUCCIONES : Leer atentamente antes de empezar el examen.

- El tiempo disponible es de tres horas.
- Se deben realizar los ejercicios 1 y 2, y dos a elegir entre el 3, el 4 y el 5.
- El examen puntúa sobre 8,5 puntos correspondientes al 85% de la nota final de la asignatura.

Ejercicio 1 (2 pts.): Tipo test (consta de cinco preguntas tipo test, cada una con tres opciones a elegir. Para cada pregunta hay una única opción correcta. Se debe elegir una única opción. Si la respuesta elegida es correcta suma 0.4 puntos. Si la respuesta es incorrecta resta 0.2 puntos. Si no se responde a una pregunta ni suma ni resta puntuación.)

Test 1) Indíquese cuál de las siguientes afirmaciones, relativas a un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, es cierta:
☐ Todo punto interior de A es también un punto de acumulación de A.
☐ Pueden existir puntos que sean a la vez exteriores a A y adherentes de A.
☐ A no puede estar contenido en su frontera.

Test 2) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diferenciable cuya matriz jacobiana en $(1, 0)$ es $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x, y) = f(x + y, xy)$. Entonces la matriz jacobiana de g en $(1, 0)$ es:
☐ $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Test 3) Sea $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 3y & \text{si } x = 0. \end{cases}$
☐ f no tiene derivadas parciales en $(0, 0)$
☐ f es continua en $(0, 0)$
☐ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 3$

Test 4) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$:
☐ Es divergente
☐ Es convergente y su suma es $-\ln 2$
☐ Es convergente y su suma es $\ln 2$

Test 5) El límite $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/\sin^2 x}$ vale:
☐ $+\infty$
☐ $\dfrac{-1}{2e}$
☐ $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

Ejercicio 2 (2,5 ptos.): Hallar los extremos (máximo y mínimo) absolutos de $f(x,y) = (x+1)^2 + y^2$ en el conjunto compacto

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4,\ x^2 + 4y^2 \geq 4,\ y \geq 0\right\}.$$

Elegir **dos**, y sólo dos, de los siguientes ejercicios:

Ejercicio 3 (2 ptos.): Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^5}{x^4 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Estudiar:

a) La continuidad de f en el punto $(0,0)$,

b) La existencia de $D_{(u,v)} f(0,0)$ para cualquier $(u,v) \neq (0,0)$,

c) La diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

Ejercicio 4 (2 ptos.): Calcular la integral doble

$$\iint_A y\, d(x,y),$$

donde $A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq 2x,\ y \geq 0\right\}$.

Ejercicio 5 (2 pts): Calcular $\oint_\Gamma y^3 dx - x^3 dy$, siendo Γ la frontera del recinto

$$A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\right\}$$

orientada positivamente.

Nombre: .... Apellidos: ....

DNI: .... Grado: ....

Examen Final de Cálculo

Grados en Ingeniería

Universidad Miguel Hernández de Elche - Jueves 12 de Septiembre de 2013

Tipo B

INSTRUCCIONES : Leer atentamente antes de empezar el examen.

- El tiempo disponible es de tres horas.
- Se deben realizar los ejercicios 1 y 2, y dos a elegir entre el 3, el 4 y el 5.
- El examen puntúa sobre 8,5 puntos correspondientes al 85% de la nota final de la asignatura.

Ejercicio 1 (2 pts.): Tipo test (consta de cinco preguntas tipo test, cada una con tres opciones a elegir. Para cada pregunta hay una única opción correcta. Se debe elegir una única opción. Si la respuesta elegida es correcta suma 0.4 puntos. Si la respuesta es incorrecta resta 0.2 puntos. Si no se responde a una pregunta ni suma ni resta puntuación.)

Test 1) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diferenciable cuya matriz jacobiana en $(1,0)$ es $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x,y) = f(x-y, xy)$. Entonces la matriz jacobiana de g en $(1,0)$ es:

☐ $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

Test 2) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1/2)^n}{n}$:

☐ Es divergente
☐ Es convergente y su suma es $\ln 2 - \ln 3$
☐ Es convergente y su suma es $\ln 2$

Test 3) Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{y} & \text{si } y \neq 0, \\ 3x & \text{si } y = 0. \end{cases}$

☐ f no tiene derivadas parciales en $(0,0)$
☐ f no es continua en $(0,0)$
☐ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

Test 4) El límite $\lim_{x\to 0} \left(\cos x^2\right)^{-1/\sin\left(x^4\right)}$ vale:

☐ $\sqrt{e}$
☐ $+\infty$
☐ $\dfrac{e}{2}$

Test 5) Indíquese cuál de las siguientes afirmaciones, relativas a un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, es cierta:

☐ Todo punto de la frontera de A es también un punto de acumulación de A.
☐ Pueden existir puntos que sean a la vez exteriores a A y frontera de A.
☐ A puede estar contenido en su frontera.

Ejercicio 2 (2,5 ptos.): Hallar los extremos (máximo y mínimo) absolutos de $f(x,y) = (x+1)^2 + y^2$ en el conjunto compacto

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4,\ x^2 + 4y^2 \geq 4,\ y \geq 0\right\}.$$

Elegir **dos**, y sólo dos, de los siguientes ejercicios:

Ejercicio 3 (2 ptos.): Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^5}{x^4 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Estudiar:

a) La continuidad de f en el punto $(0,0)$,

b) La existencia de $D_{(u,v)}f(0,0)$ para cualquier $(u,v) \neq (0,0)$,

c) La diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

Ejercicio 4 (2 ptos.): Calcular la integral doble

$$\iint_A y\,d(x,y),$$

donde $A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq 2x,\ y \geq 0\right\}$.

Ejercicio 5 (2 pts): Calcular $\oint_\Gamma y^3 dx - x^3 dy$, siendo Γ la frontera del recinto

$$A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\right\}$$

orientada positivamente.

Nombre: .... Apellidos: ....

DNI: .... Grado: ....

Examen Final de Cálculo

Grados en Ingeniería

Universidad Miguel Hernández de Elche - Jueves 12 de Septiembre de 2013

Tipo C

INSTRUCCIONES : Leer atentamente antes de empezar el examen.

- El tiempo disponible es de tres horas.
- Se deben realizar los ejercicios 1 y 2, y dos a elegir entre el 3, el 4 y el 5.
- El examen puntúa sobre 8,5 puntos correspondientes al 85% de la nota final de la asignatura.

Ejercicio 1 (2 pts.): Tipo test (consta de cinco preguntas tipo test, cada una con tres opciones a elegir. Para cada pregunta hay una única opción correcta. Se debe elegir una única opción. Si la respuesta elegida es correcta suma 0.4 puntos. Si la respuesta es incorrecta resta 0.2 puntos. Si no se responde a una pregunta ni suma ni resta puntuación.)

Test 1) Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ -3y & \text{si } x = 0. \end{cases}$

☐ f es continua en $(0,0)$
☐ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 3$
☐ f no tiene derivadas parciales en $(0,0)$

Test 2) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1/2)^n}{n}$:

☐ Es convergente y su suma es 1
☐ Es divergente
☐ Es convergente y su suma es $\ln 2$

Test 3) Indíquese cuál de las siguientes afirmaciones, relativas a un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, es cierta:

☐ Todo punto de acumulación de A es también un punto interior de A.
☐ No pueden existir puntos aislados de A que sean a la vez exteriores a A.
☐ La frontera de A siempre está contenida en A.

Test 4) El límite $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} (\sin x)^{1/\ln x}$ vale:

☐ 0
☐ 1
☐ e

Test 5) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diferenciable cuya matriz jacobiana en $(0,1)$ es $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x,y) = f(xy, x+y)$. Entonces la matriz jacobiana de g en $(0,1)$ es:

☐ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$
☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$
☐ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2 (2,5 ptos.): Hallar los extremos (máximo y mínimo) absolutos de $f(x,y) = (x+1)^2 + y^2$ en el conjunto compacto

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4,\ x^2 + 4y^2 \geq 4,\ y \geq 0\right\}.$$

Elegir **dos**, y sólo dos, de los siguientes ejercicios:

Ejercicio 3 (2 ptos.): Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^5}{x^4 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Estudiar:

a) La continuidad de f en el punto $(0,0)$,

b) La existencia de $D_{(u,v)} f(0,0)$ para cualquier $(u,v) \neq (0,0)$,

c) La diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

Ejercicio 4 (2 ptos.): Calcular la integral doble

$$\iint_A y \, d(x,y),$$

donde $A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq 2x,\ y \geq 0\right\}.$

Ejercicio 5 (2 pts): Calcular $\oint_\Gamma y^3 dx - x^3 dy$, siendo Γ la frontera del recinto

$$A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\right\}$$

orientada positivamente.

Nombre: .... Apellidos: ....

DNI: .... Grado: ....

Examen Final de Cálculo

Grados en Ingeniería

Universidad Miguel Hernández de Elche - Jueves 12 de Septiembre de 2013

Tipo D

INSTRUCCIONES : Leer atentamente antes de empezar el examen.

- El tiempo disponible es de tres horas.
- Se deben realizar los ejercicios 1 y 2, y dos a elegir entre el 3, el 4 y el 5.
- El examen puntúa sobre 8,5 puntos correspondientes al 85% de la nota final de la asignatura.

Ejercicio 1 (2 pts.): Tipo test (consta de cinco preguntas tipo test, cada una con tres opciones a elegir. Para cada pregunta hay una única opción correcta. Se debe elegir una única opción. Si la respuesta elegida es correcta suma 0.4 puntos. Si la respuesta es incorrecta resta 0.2 puntos. Si no se responde a una pregunta ni suma ni resta puntuación.)

Test 1) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(-2)^n}$:

☐ Es convergente y su suma es $-2/9$
☐ Es convergente y su suma es $-1/2$
☐ Es divergente

Test 2) Indíquese cuál de las siguientes afirmaciones, relativas a un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, es cierta:

☐ Todo punto de acumulación de A pertenece A.
☐ Todo punto interior de A es también de acumulación de A.
☐ A no puede estar contenido en su frontera.

Test 3) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diferenciable cuya matriz jacobiana en $(0,1)$ es $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x,y) = f(xy, y-x)$. Entonces la matriz jacobiana de g en $(0,1)$ es:

☐ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$
☐ $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

Test 4) El límite $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+\sin x)^{1/(1-\cos x)}$ vale:

☐ $+\infty$
☐ 1
☐ $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

Test 5) Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-x^2}{y} & \text{si } y \neq 0, \\ 3x & \text{si } y = 0. \end{cases}$

☐ f no es continua en $(0,0)$
☐ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$
☐ f no tiene derivadas parciales en $(0,0)$

Ejercicio 2 (2,5 ptos.): Hallar los extremos (máximo y mínimo) absolutos de $f(x,y) = (x+1)^2 + y^2$ en el conjunto compacto

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4,\ x^2 + 4y^2 \geq 4,\ y \geq 0\right\}.$$

Elegir **dos**, y sólo dos, de los siguientes ejercicios:

Ejercicio 3 (2 ptos.): Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^5}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Estudiar:

a) La continuidad de f en el punto $(0,0)$,

b) La existencia de $D_{(u,v)}f(0,0)$ para cualquier $(u,v) \neq (0,0)$,

c) La diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

Ejercicio 4 (2 ptos.): Calcular la integral doble

$$\iint_A y\, d(x,y),$$

donde $A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq 2x,\ y \geq 0\right\}$.

Ejercicio 5 (2 pts): Calcular $\oint_\Gamma y^3 dx - x^3 dy$, siendo Γ la frontera del recinto

$$A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\right\}$$

orientada positivamente.