

14

15. ANALISIS DINAMICO DE UN MOTOR MONOCILINDRICO**1. MOVIMIENTO DEL PISTON.**

El movimiento alternativo de un pistón se transforma en movimiento circular continuo en el eje mediante el sistema biela-manivela.

El pie de la biela por su unión con el pistón está sometido a un movimiento alterno rectilíneo, y la cabeza de la biela está obligada a describir un movimiento circular con el perno de la manivela. Para los cálculos, supondremos que el movimiento es circular uniforme. En la representación esquemática de la fig. 1, tenemos:

l_2 , longitud de la manivela.

l_3 , longitud de la biela.

θ_2 , desplazamiento angular de la manivela.

θ_3 , ángulo que forma el vector representativo de la biela con el eje X.

β , ángulo formado por el eje de la biela con el eje del cilindro, O_2B .

m_2 , masa de la manivela.

m_3 , masa de la biela.

$m_4 = m_B$, masa del pistón

X, desplazamiento del pistón respecto al P.M.S.

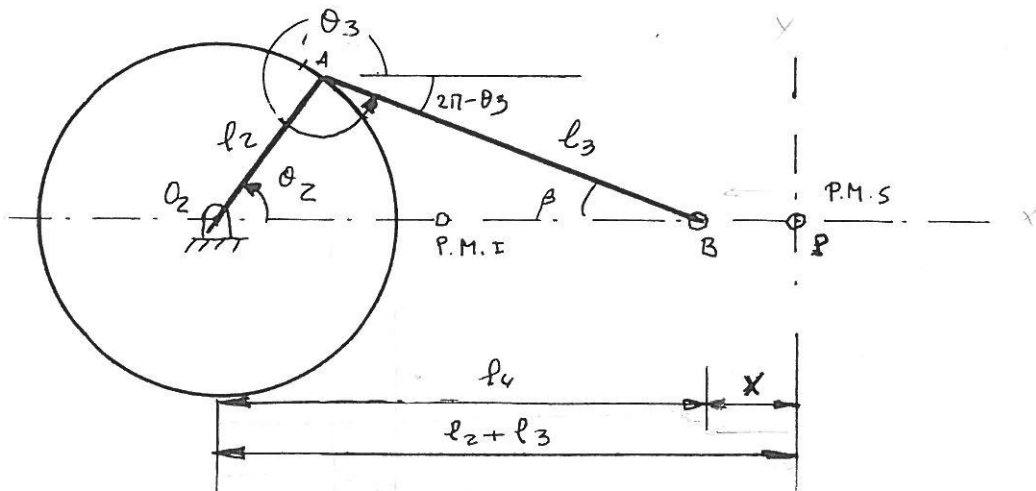


fig. 1

$$l_2 + l_3 - l_2 \cos \theta_2$$

El desplazamiento del pistón con respecto del P.M.S., viene dado por:

$$X = O_2P - O_2B = l_2 + l_3 - l_4 \quad (1)$$

en la que

$$l_4 = l_2 \cos\theta_2 + l_3 \cos\beta \quad (2)$$

Sustituyendo en la anterior,

$$X = l_2 + l_3 - (l_2 \cos\theta_2 + l_3 \cos\beta) \quad (3)$$

y como

$$\cos \beta = (1 - \text{sen}^2\beta)^{1/2} \quad (4)$$

De la fig.1, puede deducirse que

$$l_2 \text{sen}\theta_2 = l_3 \text{sen} \beta \quad (5)$$

o que

$$\text{sen}\beta = \frac{l_2}{l_3} \text{sen}\theta_2 \quad (6)$$

Sustituyendo en la (4)

$$\cos\beta = (1 - \frac{l_2^2}{l_3^2} \text{sen}^2\theta_2)^{1/2}$$

haciendo $\lambda = l_2/l_3$

$$\cos\beta = (1 - \lambda^2 \text{sen}^2 \theta_2)^{1/2} = \cos \theta_3 \quad (7)$$

Está bien, como el fig, es lo bueno, después de hacer falta para facilitar el cálculo.

Desarrollando por el binomio de Newton

$$\cos \beta = 1^{1/2} - \frac{1}{2} 1^{1/2-1} \lambda^2 \text{sen}^2\theta_2 - \frac{1}{8} \lambda^4 \text{sen}^4\theta_2 + \dots \quad (8)$$

y como $\lambda = 0,4 \div 0,16$ para motores, a partir del tercer término puede ser despreciado sin que se cometa un error elevado; por lo que la ec. (8), queda

$$\cos \beta \approx 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \theta_2 \quad (9)$$

y como $\sin^2 \theta_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta_2$

Sustituyendo en la ec (9),

$$\cos \beta = 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta_2 \right) = 1 - \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{1}{4} \lambda^2 \cos 2\theta_2 \quad (10)$$

Llevando este valor a la ec. (3), nos queda

$$\rightarrow X = l_2 + l_3 - l_2 \cos \theta_2 - l_3 \left(1 - \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{1}{4} \lambda^2 \cos 2\theta_2 \right) = \left[l_2 - l_2 \left(\cos \theta_2 + \frac{1}{4} \frac{l_2}{l_3} \cos 2\theta_2 \right) + \frac{l_2^2}{4l_3} \right] i \quad (11)$$

Esta expresión nos determina el desplazamiento del pistón desde el P.M.S. en función de las longitudes de la biela, manivela y del ángulo θ_2 . Si se hubiera sustituido en la ec (2), se obtendría el desplazamiento del pistón desde el punto O_2 , en otras palabras:

Velocidad del pistón.

$$\vec{V}_4 = \vec{X}_{O_1} = \left[l_3 - \frac{1}{4} \frac{l_2^2}{l_3} + l_2 \left(\omega_2 \theta_2 + \frac{l_2}{4l_3} \omega_2^2 \theta_2 \right) \right] i$$

La velocidad del pistón se obtiene derivando la expresión (11); por lo que

$$\dot{X} = V_p = l_2 (\dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + \frac{1}{2} \frac{l_2}{l_3} \dot{\theta}_2 \sin 2\theta_2) \quad (12)$$

$$\vec{X} = -l_2 \left(\cos \theta_2 + \frac{1}{2} \frac{l_2}{l_3} \cos 2\theta_2 \right) \vec{\theta}_2 \vec{i}$$

Aceleración del pistón.

Derivando la expresión (12) obtenemos la aceleración del pistón; por lo que

$$\ddot{X} = A_p = l_2 \ddot{\theta}_2 \left(\sin \theta_2 + \frac{1}{2} \frac{l_2}{l_3} \sin 2\theta_2 \right) + l_2 \dot{\theta}_2^2 \left(\cos \theta_2 + \frac{l_2}{l_3} \cos 2\theta_2 \right) \quad (13)$$

en la que si $\dot{\theta}_2 = \text{cote}$, $\ddot{\theta}_2 = 0$, se obtiene para \ddot{X}

$$\ddot{X} = A_p = l_2 \dot{\theta}_2^2 \left(\cos \theta_2 + \frac{l_2}{l_3} \cos 2\theta_2 \right) \quad \text{ec. p 15, phalan} \quad (14)$$

2. MASAS CON MOVIMIENTO ALTERNATIVO Y CIRCULAR.

Como paso preliminar al estudio de la compensación de máquinas alternativas, es conveniente reemplazar la masa de la biela m_3 por dos masas equivalentes m_{3A} y m_{3B} situadas en los extremos A y B, respectivamente. Aplicando en la fig. 2 las ecuaciones deducidas anteriormente para distribuir la masa m_3 de la biela, tenemos

$$m_{3A} = m_3 \left(\frac{l_3 - r_{g3}}{l_3} \right) \quad m_{3B} = m_3 \frac{r_{g3}}{l_3} \quad (16)$$

A la masa m_{3B} en B, agregamos la masa m_4 del pistón; y la masa total en el punto B, será:

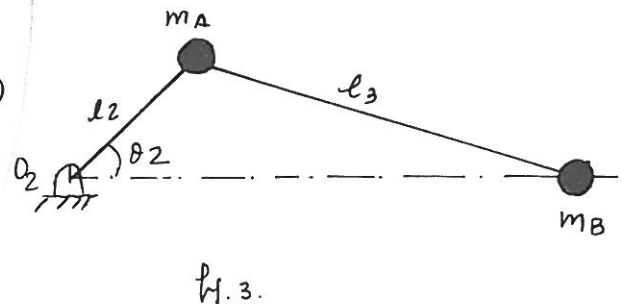
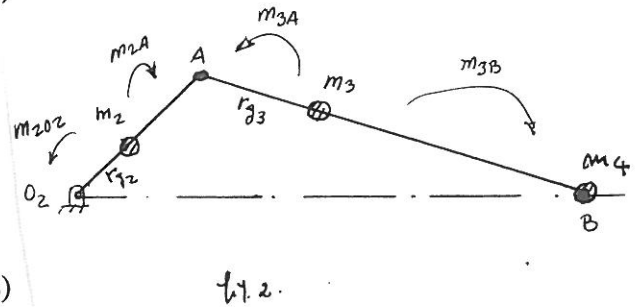
$$m_B = m_{3B} + m_4 \quad (18)$$

La masa m_2 de la manivela puede ser llevada igualmente al punto A y al O_2 , aplicando las mismas ecuaciones, fig. 2, por lo que

$$m_{2A} l_2 = m_2 \cdot r_{g2} \quad m_{2A} = m_2 \frac{r_{g2}}{l_2} \quad (19)$$

A la masa m_{3A} en A, obtenida anteriormente, agregamos la masa m_{2A} correspondiente a la manivela, y llamamos a la masa total

$$m_A = m_{3A} + m_{2A} \quad (20)$$

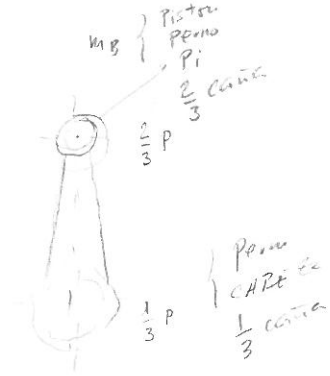


Con esta nueva distribución de masas reducimos el sistema a uno de dos masas m_A y m_B , situadas respectivamente en el extremo de la manivela y en el pistón, como indica la fig. 3, (la masa en O_2 , m_{202} , carece de efectos dinámicos, por lo que no la consideraremos). Ahora el sistema puede ser considerado como formado por las dos masas situadas en los puntos A y B, sometidas a un movimiento de rotación, la primera, y de traslación la segunda.

En la práctica es buena norma, en el caso de bielas corrientes, englobar una tercera parte de su peso en la cabeza de la biela y los otros dos tercios en su base, despreciando el par de inercia. Se consideran, por tanto, con aproximación más que suficiente, concentrados sobre el eje del perno del pistón y dotados de movimiento alternativo, las masas de las siguientes partes:

m_B :

- Pistón completo con sus aros.
- Perno del pistón.
- Pie de la biela y dos tercios de la caña.
- Vástago y cruceta en su caso.



Se consideran concentradas sobre el eje del perno de la manivela y dotadas de movimiento circular, las masas de las siguientes partes:

m_A

- Perno de la manivela.
- Cabeza de biela completa y un tercio de la caña.

3. FUERZAS DE INERCIA, MOMENTO TORSOR Y REACCIONES.

3.1. Fuerzas de inercia.

En la fig.3 se han reducido todas las masas del sistema a dos masas situadas en los puntos A y B. Estudiaremos a continuación las fuerzas, momentos y reacciones debidas a las inercias de las barras.

En el pistón.

$$\vec{F}_{iB} = -m_B \vec{A}_P = -m_B l_2 \theta_2^2 \left(\cos\theta_2 + \frac{l_2}{l_3} \cos 2\theta_2 \right) \cdot i \quad (21)$$

Ojo con el signo. Su sentido es el indicado en la fig.



En el extremo de la manivela

$$\vec{F}_{iA} = -m_A \cdot \vec{A}_A$$

en la que

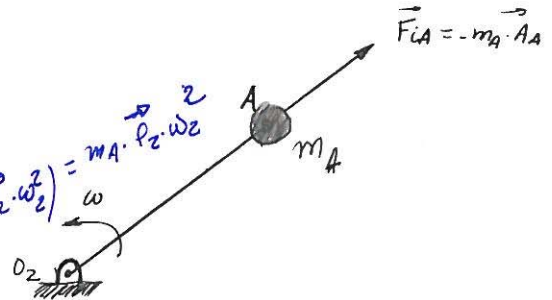
$$\vec{A}_{TAO_2} = 0, \text{ si } \varepsilon = \text{cote.}$$

$$\vec{A}_{NAO_2} = -l_2 \theta_2^2 = -l_2 \cos\theta_2 \theta_2^2 i - l_2 \sin\theta_2 \theta_2^2 j$$

$$\vec{F}_{iA} = -m_A \cdot \vec{A}_{NAO_2} = -m_A \cdot \vec{A}_{TAO_2} = m_A (-\vec{A}_{NAO_2}) = m_A (l_2 \cos\theta_2 \theta_2^2 i + l_2 \sin\theta_2 \theta_2^2 j)$$

$$\vec{F}_{iA} = -m_A (-l_2 \cos\theta_2 \theta_2^2 i - l_2 \sin\theta_2 \theta_2^2 j) =$$

$$m_A l_2 \theta_2^2 (\cos\theta_2 i + \sin\theta_2 j) = F_{AX} + F_{AY} \quad (22)$$



Momento de torsión de inercia.

La fuerza de inercia en A, F_{iA} , no da momento con respecto al punto O_2 por estar dirigida hacia este punto.

La fuerza de inercia en B, F_{iB} (fig.4), se puede descomponer en una fuerza en la dirección de la biela de módulo

$$P_{AB} = \frac{F_{iB}}{\cos\theta_3} \quad (23)$$

y en otra que actúa sobre las paredes del cilindro P_y , normal al eje O_2B , cuyo módulo será

$$P_y = F_{iB} \tan\theta_3 \quad (24)$$

La fuerza P_y es mayor cuanto mayor sea θ_3 , y es la causa de las pérdidas por rozamiento en las paredes del pistón.

Momento de giro en el cigüeñal

La fuerza P_{AB} es ejercida por la biela sobre el botón de la manivela, y, por tanto, sobre el eje del cigüeñal, respecto a cuyo eje de rotación tiene un brazo l_2 , ~~da~~ da origen a un momento de giro, T_{Fi} , cuyo valor será:

$$\vec{T}_{Fi} = \vec{l}_2 \times \vec{P}_{AB} \quad (25)$$

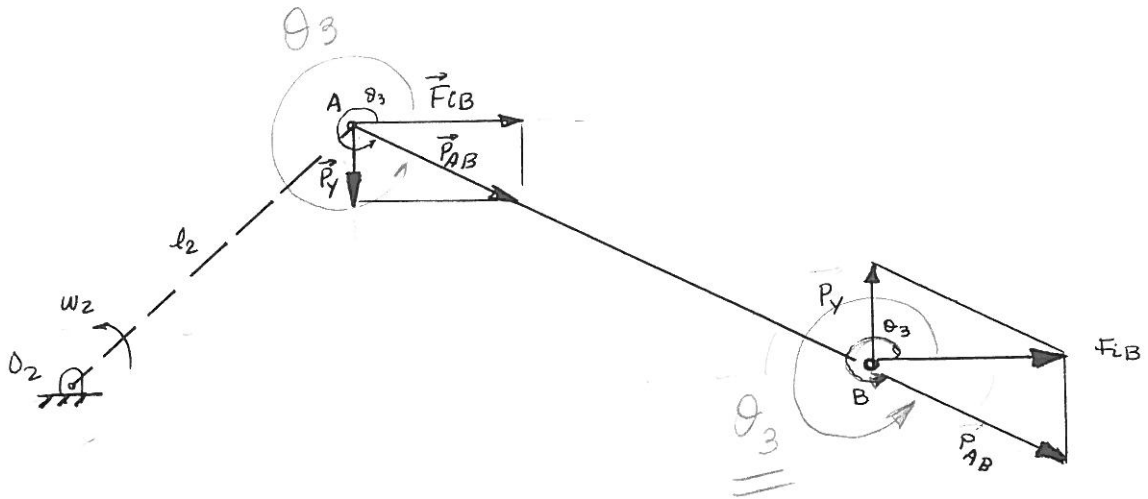


fig. 4

en la que

$$|\vec{P}_{AB}| = \frac{F_{iB}}{\cos \theta_3}$$

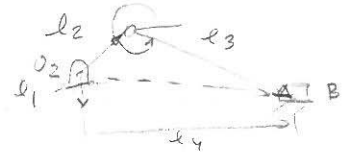
$$\vec{P}_{AB} = |\vec{P}_{AB}| \cdot e^{\theta_3 j} = \frac{F_{iB}}{\cos \theta_3} e^{\theta_3 j} = F_{iB} + F_{iB} \cdot \text{tag} \theta_3 j \quad (26)$$

Sustituyendo valores en la Ec. (25), tenemos

$$\vec{T}_{Fi} = \vec{l}_2 \times \vec{P}_{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ l_2 \cos \theta_2 & l_2 \text{sen} \theta_2 & 0 \\ F_{iB} & F_{iB} \text{tag} \theta_3 & 0 \end{vmatrix} = (l_2 \cos \theta_2 \cdot F_{iB} \text{tag} \theta_3 - l_2 F_{iB} \text{sen} \theta_2) k =$$

$$\vec{T}_{Fi} = -F_{iB} l_2 (\text{sen} \theta_2 - \cos \theta_2 \text{tag} \theta_3) k \quad (27)$$

ec (2.7) p.23 (14.2011) VER por construcción p.1.



Teniendo en cuenta que $l_2 \text{ sen}\theta_2 = -l_3 \text{ sen}\theta_3$; de esta expresión se obtiene

$$\frac{l_2 \text{ sen}\theta_2}{\text{cos}\theta_3} = \text{tag}\theta_3 = \frac{l_2 \text{ sen}\theta_2}{l_3 \text{ cos}\theta_3} = \frac{l_2 \text{ sen}\theta_2}{l_3 (1 - \lambda^2 \text{ sen}^2\theta_2)^{1/2}} \approx \frac{l_2}{l_3} \text{ sen}\theta_2$$

como se ha visto antes en p. 2

$$\vec{O_2B} = \vec{l}_2 + \vec{l}_3 = (l_2 \text{ cos}\theta_2 + l_3 \text{ cos}\theta_3) \hat{i} + (l_2 \text{ sen}\theta_2 + l_3 \text{ sen}\theta_3) \hat{j}$$

$$\vec{O_2B} = \vec{l}_1 + \vec{l}_4 = l_4 - l_1 \hat{j}$$

de eq: $-l_1 = l_2 \text{ sen}\theta_2 + l_3 \text{ sen}\theta_3$

con $l_1 = 0$

$$l_2 \text{ sen}\theta_2 = -l_3 \text{ sen}\theta_3$$

pues $\lambda^2 \text{ sen}^2\theta_2 < 1$, según se ha visto anteriormente

Sustituyendo en la ec. (27) este valor, nos queda

$$\vec{T}_{Fi} = -F_{iB} l_2 \left(\text{sen}\theta_2 + \frac{l_2}{l_3} \text{ cos}\theta_2 \text{ sen}\theta_2 \right) \hat{k} \quad (28)$$

y en función del ángulo doble,

$$\vec{T}_{Fi} = -F_{iB} l_2 \left(\text{sen}\theta_2 + \frac{l_2}{2l_3} \text{ sen}2\theta_2 \right) \hat{k} \quad (29)$$

Ecuación que nos da el momento de giro de inercia en función de los parámetros de la barra de entrada, longitud de la biela y de las fuerzas de inercia alternativas.

Reacciones:

Pistón.

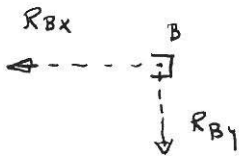
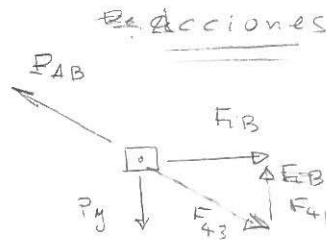
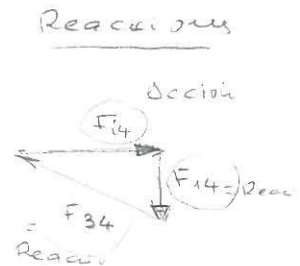


fig.



$$R_{Bx} = -F_{iB}$$

$$R_{By} = -P_{yJ} = F_{iB} \text{ tag}\theta_{3j} \quad (30)$$



$$\vec{T}_{GB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ l_2 \cos\theta_2 & l_2 \sin\theta_2 & 0 \\ -F_{GB} & -F_{GB} \tan\theta_3 & 0 \end{vmatrix} = (l_2 \cos\theta_2 \cdot F_{GB} \tan\theta_3 + l_2 F_{GB} \sin\theta_2) \cdot k =$$

$$\vec{T}_{GB} = F_{GB} l_2 (\sin\theta_2 + \cos\theta_2 \tan\theta_3) \cdot k \quad (34)$$

Operando de la misma forma que se ha hecho anteriormente, obtenemos

$$\vec{T}_{GB} = F_{GB} l_2 \left(\sin\theta_2 + \frac{l_2}{l_3} \cos\theta_2 \sin\theta_2 \right) \cdot k \quad (35)$$

y en función del ángulo doble:

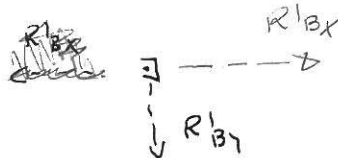
$$\vec{T}_{GB} = F_{GB} l_2 \left(\sin\theta_2 + \frac{l_2}{2l_3} \sin 2\theta_2 \right) \cdot k \quad (36)$$

Dante P 213

Ecuación que nos da el momento de giro entregado por los gases en función de los parámetros de la barra de entrada, longitud de la biela y de la fuerza dada por los gases.

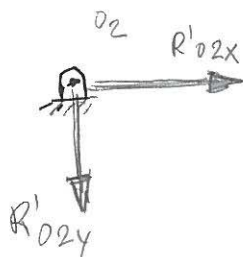
Reacciones:

Pistón.



$$\begin{aligned} R'_{BX} &= P_i \\ R'_{BY} &= P \tan \alpha_j \end{aligned} \quad (37)$$

Articulación O₂.



$$\begin{aligned} R'_{O2X} &= +P_i \\ R'_{O2Y} &= -P \tan \alpha_j \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} R'_{O2X} &= +F_{GB} \cdot i \\ R'_{O2Y} &= -F_{GB} \tan \theta_3 j \end{aligned}$$

3.3 Momentos de giro y reacciones totales.

Sumando las ecuaciones obtenidas para los momentos (27) y (32) para T_{iF} y T_g , respectivamente, obtenemos el momento de giro total T_t

$$\vec{T}_T = T_{Fi} + T_{GB} = I_2 (\text{sen}\theta_2 + \frac{I_2}{2I_3} \text{sen}2\theta_2)(-F_{Bi} + F_{GB})k \quad (39)$$

Reacciones totales:

Sumando las ecuaciones obtenidas para las reacciones, ec. (28) y (34), se obtienen las reacciones totales R_{TBX} y R_{TBY}

Pistón.

$$R_{TBX} = (-F_{iB} + P) i \quad (37)$$

$$R_{TBY} = (-P_y + P \text{tag}\theta_3) j$$

Haciendo lo mismo con las (29) y (35) para R_{O2X} y R_{O2Y} , respectivamente, obtenemos las reacciones totales en O_2

Articulación O_2

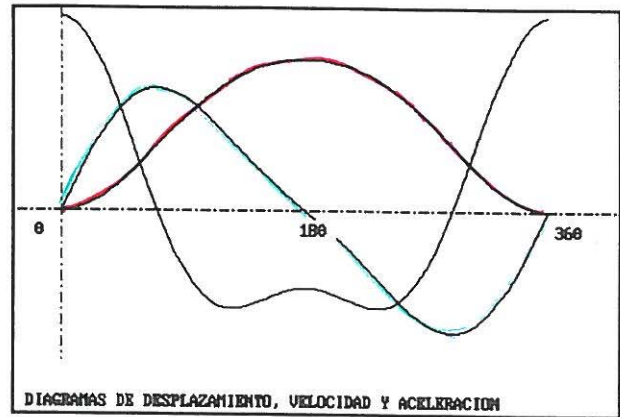
$$R_{TO2X} = (-F_{iB} - F_{iA} \cos\theta_2 + P) i \quad (40)$$

$$R_{TO2Y} = (-F_{iA} \text{sen}\theta_2 + \overset{F_{iB}}{P} \text{tag}\theta_3 + P_y) j$$

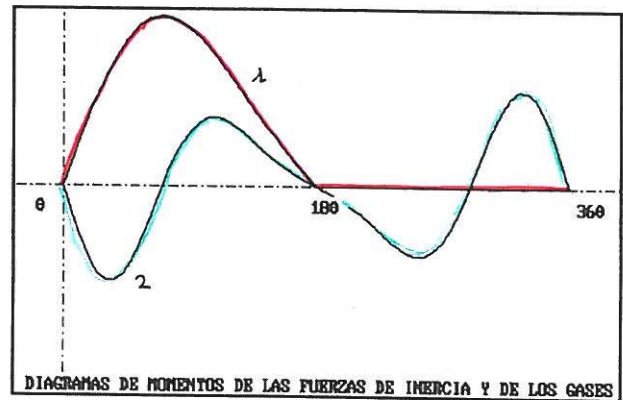
A continuación se da el listado para ordenador del programa que nos permite determinar los diagramas de desplazamiento, velocidad y aceleración, gráficos 1, 2 y 3 de la fig.a. Los gráficos correspondientes a los momentos producidos por los gases y las fuerzas de inercia se dan en la fig.b; y en la fig. c, se da el gráfico correspondiente al par resultante.

1. Desplazamiento (—)
2. Velocidades (—)
3. Aceleraciones (—)

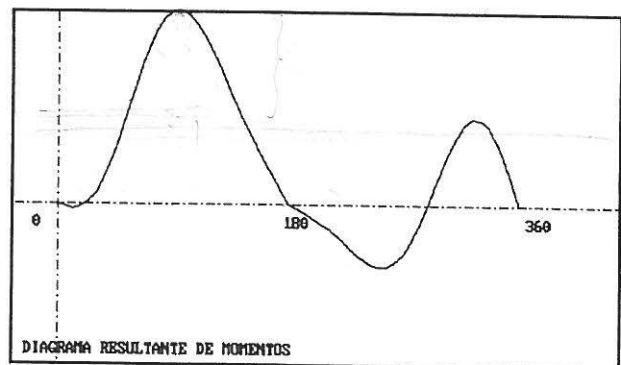
con respecto al P.M.S



1. Par debido a la acción de los gases (—)
2. Par debido a las fuerzas de inercia (—)



Par resultante



EQUILIBRADO

4. FUERZAS DE SACUDIDA.

Como hemos visto se pueden obtener las fuerzas de sacudida, momentos y reacciones para cualquier posición del ángulo de entrada θ_2 , en el sistema biela manivela. La resultante de las fuerzas de sacudida actúa en la bancada provocando perturbaciones y vibraciones que es preciso eliminar.

Las fuerzas de sacudida pueden ser reducidas añadiendo masas en lugares apropiados. Para el caso del sistema biela-manivela estas fuerzas pueden ser minimizadas y el problema simplificarse, si se tratan por separado las fuerzas de inercia de la forma que se indica a continuación.

Fuerzas de inercia debidas al movimiento del pistón (fuerzas alternativas).

En particular es apropiado considerar la fuerza alternativa de inercia, F_{alt} , compuesta de dos sumandos: la primaria y la secundaria. Así pues,

$$F_{alt} = F_{pri} + F_{sec} \quad (41)$$

Teniendo en cuenta la ec. (21)

$$F_{pri} = -m_B l_2 \cdot \ddot{\theta}_2 \cos\theta_2 \quad (42)$$

$$F_{sec} = -m_B \frac{l_2^2}{l_3} \ddot{\theta}_2 \cos 2\theta_2 = -m_B \frac{l_2^2}{4l_3} (2\ddot{\theta}_2) \cos 2\theta_2 = -m_B \frac{l_2^2}{4l_3} \ddot{\theta}_2 \cos 2\theta_2 \quad (43)$$

La fuerza primaria sería equivalente a la fuerza de inercia total si la biela fuera de longitud infinita. La fuerza secundaria proviene (junto con los términos que se han despreciado), del hecho de ser la biela de longitud finita.

Debe hacerse notar que las dos fuerzas, primaria y secundaria, se consideran como debidas a la masa m_B que tiene un movimiento armónico. Para la fuerza primaria la amplitud del movimiento armónico es igual $m_B l_2 \cdot \omega_2^2$, y el periodo es el tiempo en dar el cigüeñal una vuelta completa; y para la secundaria, la amplitud es igual a $m_B l_2^2 / 4l_3 \cdot (2\omega_2)^2$ y su periodo es el de una manivela imaginaria girando a velocidad doble que el cigüeñal.

Fuerza debida a la masa con movimiento circular.

Su valor viene dado por la Ec. (22)

$$\vec{F}_{iA} = m_A \cdot \vec{l}_2 \cdot \omega_2^2 \quad \vec{F}_c = -m_A \cdot A_A \quad \left. \begin{array}{l} \vec{A}_A = -\omega_2^2 \cdot \vec{l}_2 \\ \vec{F}_c = -m_A \cdot A_A \end{array} \right\}$$

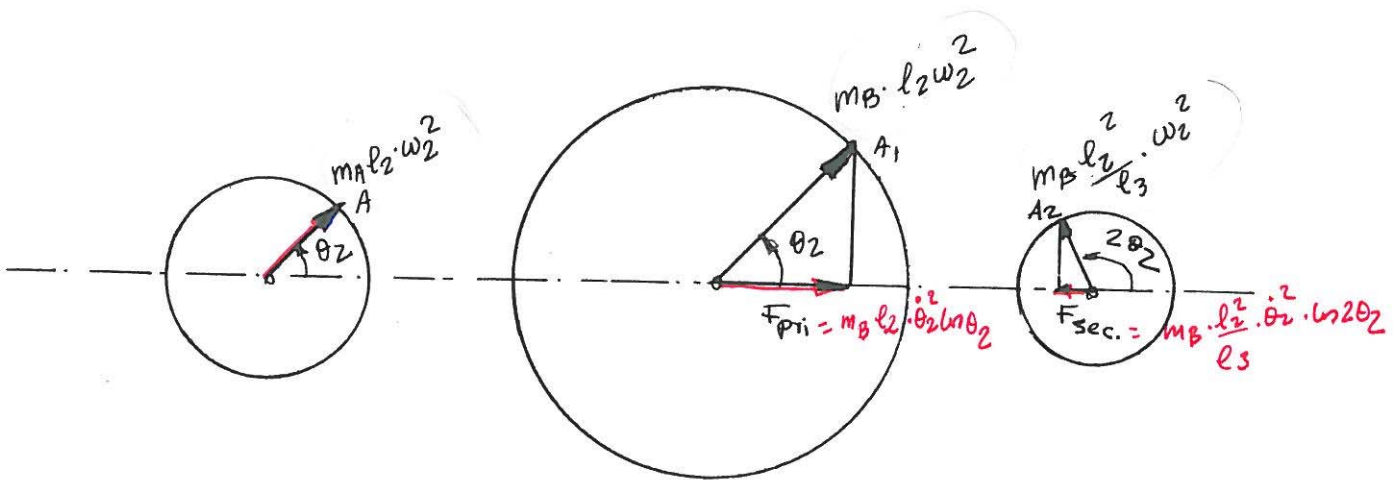
y está aplicada en el extremo de la manivela.

Bibliografía
Principios de Mecánica 2. 31 de 73

Fuerza de inercia resultante.

Considerando todas las fuerzas de inercia que intervienen, fuerzas primarias y secundaria, se puede determinar un gráfico que da la variación de estas fuerzas para un ciclo completo. El gráfico se construye de la forma que se indica a continuación.

1. Se elige una escala de fuerzas apropiadas, y después se dibujan tres circunferencias. Una, de radio $m_A l_2 \omega_2^2$, otra de radio $m_B l_2 \omega_2^2$ y la última de radio $m_B l_2^2 / l_3 \omega_2^2$, como indican las figuras 6a, 6b y 6c.



Fuerza de inercia
debida a la masa en A
(fuerza primaria)

fig. 6a

Fuerza de inercia
debida a la masa en B
(fuerza primaria)

fig. 6b

Fuerza de inercia
debida a la masa en B
(fuerza secundaria)

fig. 6c

2. Se trazan las rectas OA, OA₁ y OA₂ que forman con los ejes los ángulos θ_2 , las dos primeras, y $2\theta_2$, la tercera.

3. Las tres componentes se pueden combinar en un sólo diagrama, fig. 7. En éste se han situado los tres círculos concéntricos con radios $r_1 = m_A l_2 \omega_2^2$, $r_2 = r_1 + m_B l_2 \omega_2^2$ y $r_3 = r_2 + m_B l_2^2 \omega_2^2 / l_3$. El primero representa el vector para las fuerzas de inercia reducidas al punto A, el segundo, el vector correspondiente a la fuerza de la masa alterna m_B , primaria, y el tercero, el correspondiente a la fuerza de inercia de la masa alterna m_B , secundaria.

La fuerza de sacudida resultante S, vendrá representada por la suma de los vectores

$\vec{F}_{priA} + \vec{F}_{priB} + \vec{F}_{secB}$, lo que permite determinar en módulo, dirección y sentido la fuerza de sacudida resultante para cualquier posición de la manivela.

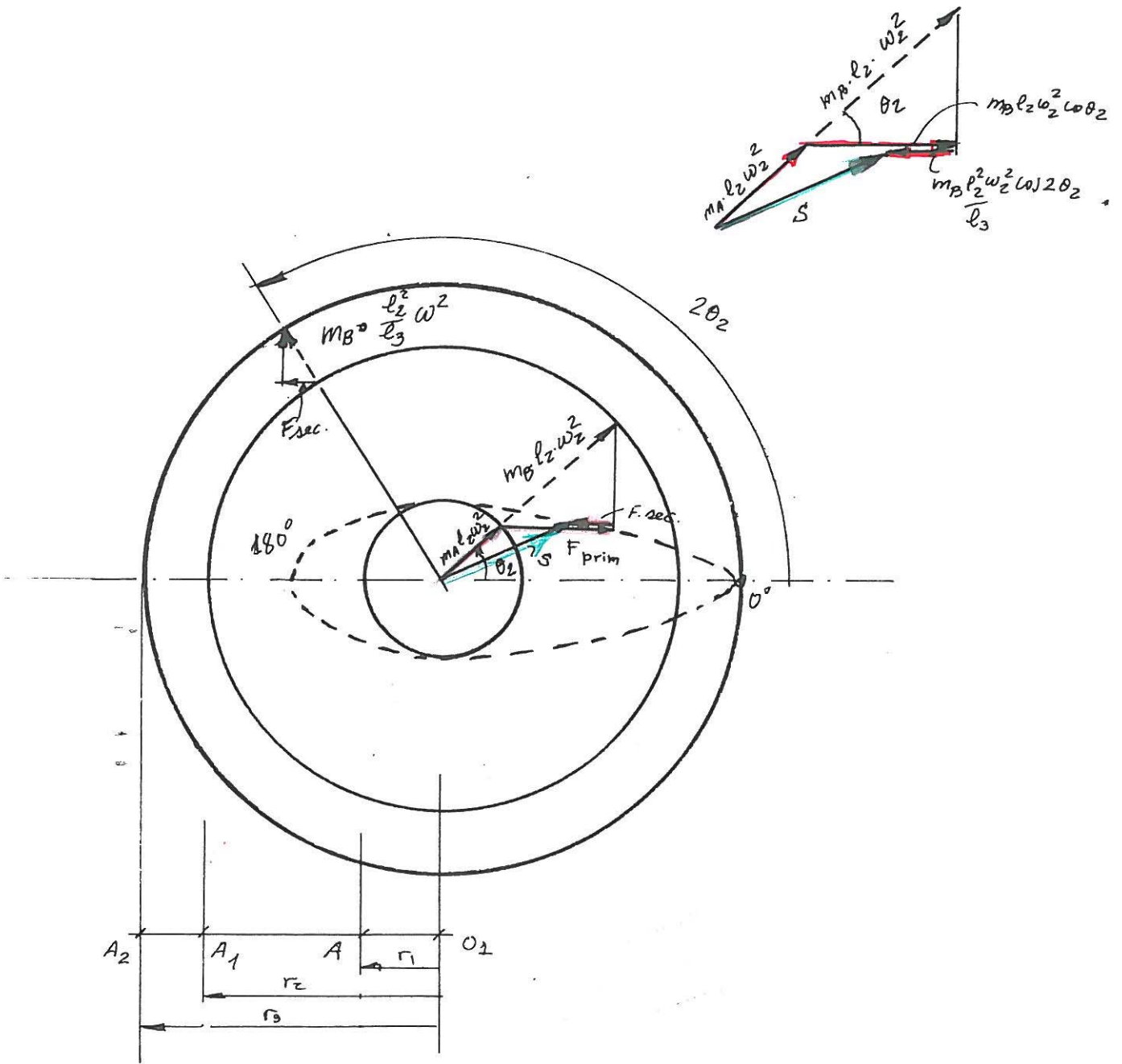


fig.7

$$r_1 = m_A l_2 \omega_2^2$$

$$r_2 = r_1 + m_B l_2 \omega_2^2$$

$$r_3 = r_2 + m_B l_2^2 / l_3 \omega_2^2$$

$$\vec{S} = m_A l_2 \omega_2^2 + m_B l_2 \omega_2^2 \cos \theta_2 + m_B l_2^2 / l_3 \omega_2^2 \cos 2\theta_2 \vec{i}$$

5. EQUILIBRADO DEL MOTOR DE UN SOLO CILINDRO.

Fuerza de inercia primaria en A.

La fuerza de inercia de la manivela y de la parte proporcional de la biela que hemos supuesto concentradas en el punto A, se puede equilibrar colocando una masa de características apropiadas en el lado opuesto del cigüeñal, de tal forma que se cumpla:

$$m_0 e = m_A \cdot l_2 \quad (44)$$

en la que m_0 , es la masa a colocar como contrapeso a la distancia e . En la fig. 8, se muestra la situación de ésta.

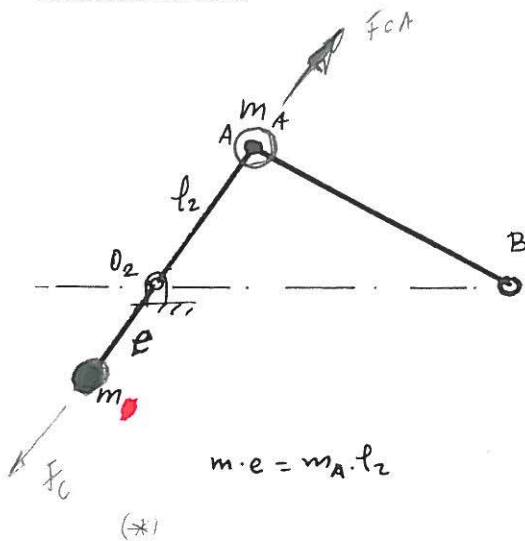


fig. 8

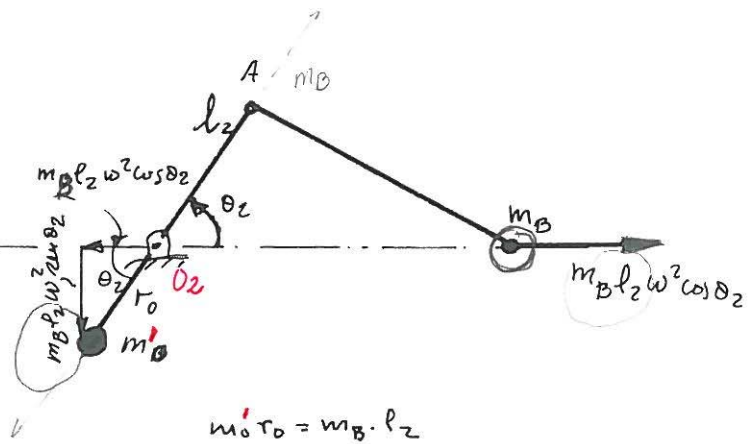


fig. 9

Fuerza primaria alternativa en B.

La fuerza de inercia debida a la masa alternativa no puede ser equilibrada agregando un sólo contrapeso dispuesto en forma opuesta en la manivela; sin embargo, las perturbaciones pueden ser modificadas valiéndonos de este procedimiento. En la fig. 9 se ha añadido en sentido opuesto al botón de la manivela una masa tal que $m_0' r_0 = m_B l_2$; esta masa da lugar a una fuerza centrífuga de valor

$$F_c = m_0' r_0 \cdot \omega_2^2 = m_B \cdot l_2 \cdot \omega_2^2, \quad \text{aplicada en el codo del cigüeñal.}$$

Si ahora descomponemos esta fuerza, en el punto O_2 , en sus componentes horizontal y vertical:

$$\text{Compo. hori.} = -m_B l_2 \omega_2^2 \cos \theta_2 \quad (45)$$

$$\text{Compo. vert.} = -m_B l_2 \omega_2^2 \sin \theta_2 \quad (46)$$

puede observarse que la componente horizontal equilibra a la fuerza primaria en B, al ser éstas opuestas. De esta forma, la fuerza primaria se ve compensada y las fuerzas verticales se

ven modificadas.

Equilibrado con una masa única.

En algunos casos pueden obtenerse mejores resultados haciendo el equilibrado por medio de una única masa giratoria opuesta en el codo del cigüeñal, de la forma que se indica a continuación. En este caso se supone concentrada en el punto A una masa m'_A única que engloba a m_A más un medio a dos tercios de la masa alternativa m_B , fig 10. Esta masa se equilibra con otra masa, m_o , prolongando la manivela por debajo de O_2 la distancia r_o , debiéndose cumplir que:

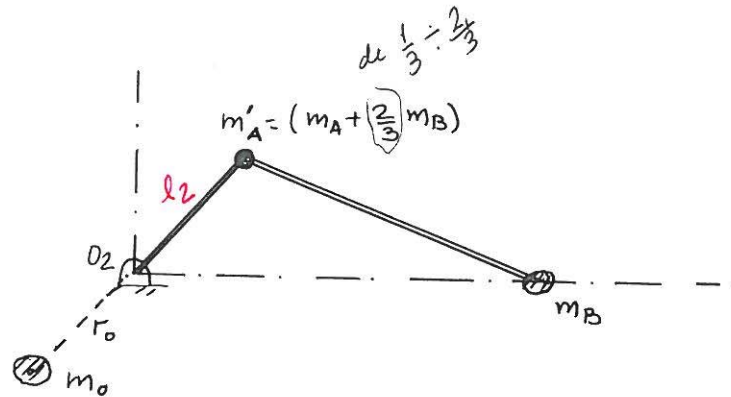


Fig.10

$$m'_A = m_A + \frac{2}{3} m_B \quad \text{y} \quad m_o r_o \quad \text{será, ahora,} \quad m_o r_o = (m_A + \frac{2}{3} m_B) l_2$$

De esta forma el diagrama de esfuerzos desequilibrados se ve reducido en la forma que se indica en la fig. 11.

A continuación se da el listado para ordenador del programa que permite determinar los diagramas de esfuerzos para el mecanismo desequilibrado y equilibrado, y el resultado obtenido con su aplicación, fig. 11.

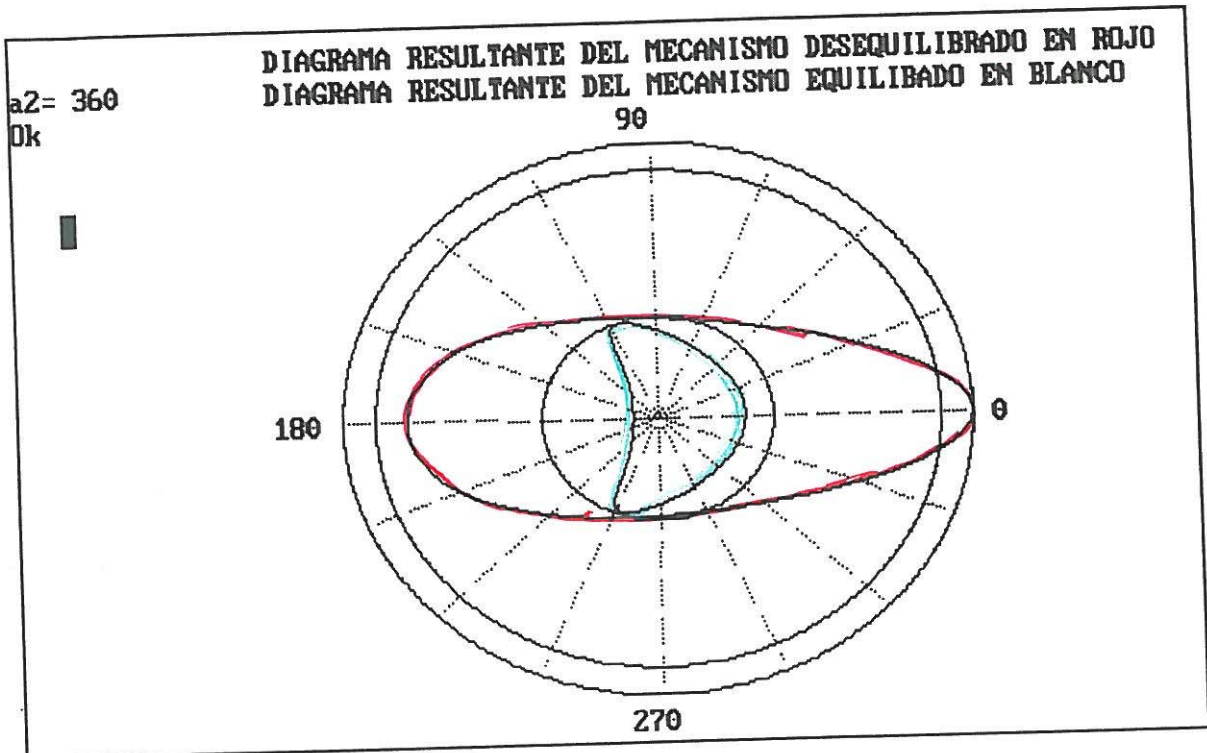


fig. 11

Desequilibrado (-)
 Equilibrado (-), dentro de lo posible

6. EQUILIBRADO DE LAS FUERZAS DE CUALQUIER ORDEN EN EL MECANISMO BIELA-MANIVELA

1. Equilibrado de las fuerzas de primer orden.

Las fuerzas de primer orden se pueden cancelar de la forma que se indica a continuación:

a). Se equilibra la masa en el extremo de la manivela, m_A , como se ha hecho anteriormente.

b). La fuerza primaria correspondiente a m_B , se equilibra de la siguiente forma.

Se dispone, fig.12, de dos ruedas dentadas A y B en el mismo eje. La rueda A tiene el radio la mitad que la segunda y la rueda B engrana con la C, siendo las dos iguales. La rueda A transmite el movimiento a la E a través de la rueda D, siendo también las dos iguales. Con esta disposición los centros de las ruedas C y E quedan equidistantes del eje de la rueda A, la distancia $a=a$. En las ruedas A y E hay dos contrapesos, formando un ángulo θ_2 igual al que forma la manivela con la bancada, pero de sentido contrario. Para los contrapesos se ha elegido un radio R_c ,

Al girar la manivela, por la disposición adoptada, los contrapesos están sometidos a una fuerza centrífuga cuyo valor es:

$$F_c = m_c R_c \cdot \dot{\theta}_2^2 = F'_c$$

Las fuerzas F_c y F'_c para cada uno de los contrapesos son simétricas, y su resultante será:

$$F = 2 m_c R_c \cdot \omega^2 \cdot \cos\theta_2$$

Como la fuerza F_c debe ser igual y contraria a la F_{pri} , y anteriormente se obtuvo para ésta:

$$F_{pri} = m_B \cdot l_2 \cdot \dot{\theta}_2^2 \cos\theta_2$$

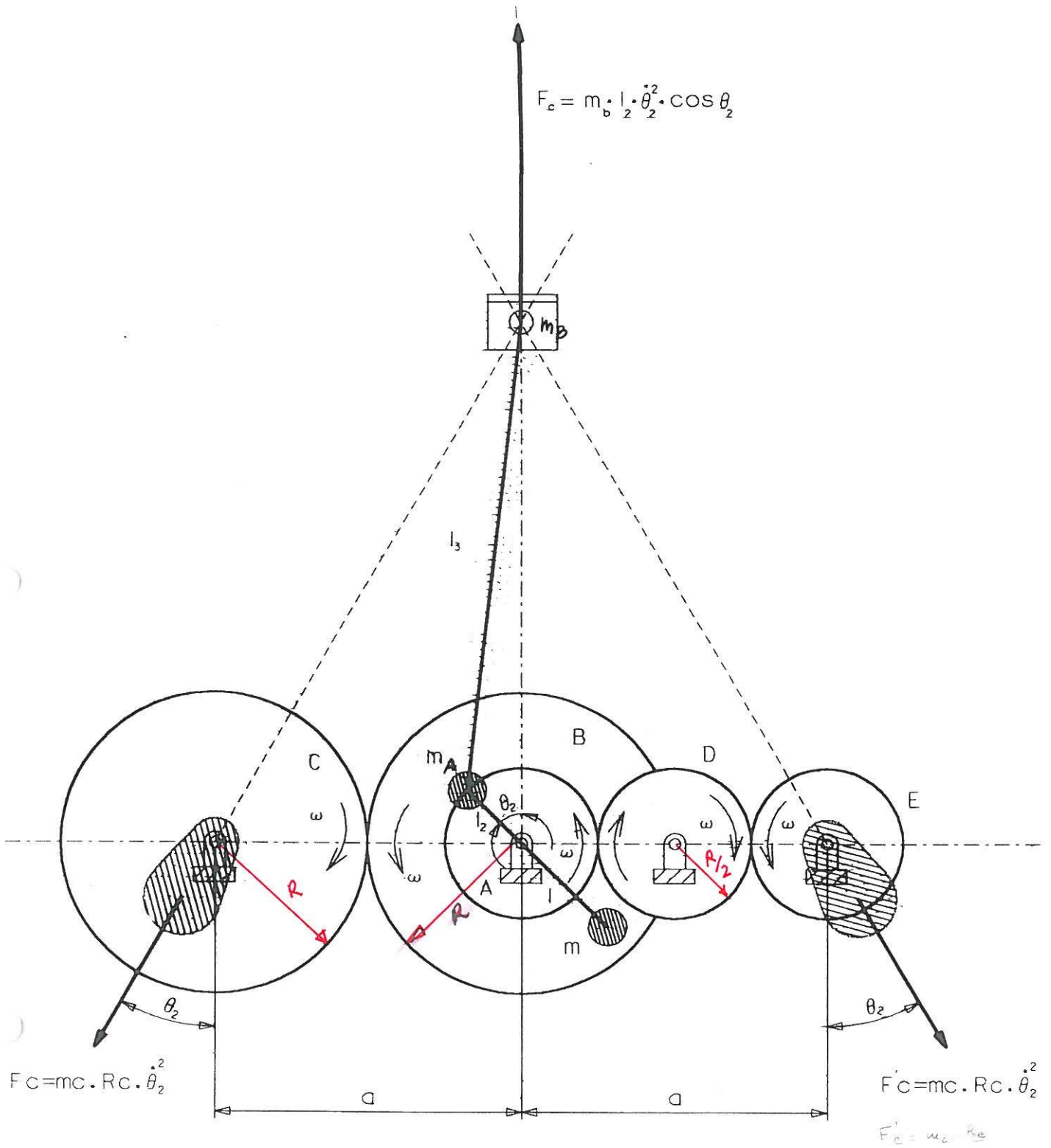
Igualando resultará:

$$2m_c R_c = m_B l_2 \qquad m_c R_c = \frac{m_B l_2}{2}$$

Elijiendo ahora el radio R_c adecuado para los contrapesos, nos queda para m_c

$$m_c = \frac{m_B l_2}{2R_c}$$

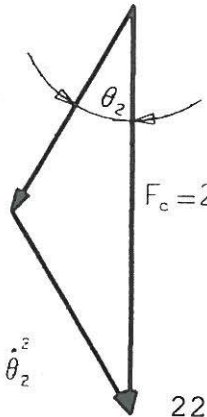
$$F_c = m_b \cdot l_2 \cdot \dot{\theta}_2^2 \cdot \cos \theta_2$$



$$F_c = m_c \cdot R_c \cdot \dot{\theta}_2^2$$

$$F_c = 2 \cdot m_c \cdot R_c \cdot \dot{\theta}_2^2 \cdot \cos \theta_2$$

$$F_c = m_c \cdot R_c \cdot \dot{\theta}_2^2$$



2. Equilibrado de las fuerzas de segundo orden.

En la fig. 13, la rueda A gira con la manivela que está equilibrada de la forma que se ha dicho anteriormente.

La rueda B es del mismo tamaño que la A. Las ruedas C , D y E son iguales y de radios la mitad de B. Sobre las ruedas C y E se han situados los contrapesos que forman un ángulo $2\theta_2$ con respecto al eje vertical, y giran a doble de velocidad que la manivela. Debido a la disposición de la fig., las distancias a uno y otro lado del eje vertical son $b = b$ y $a = a$, y las fuerzas de inercia para los contrapesos resultan simétricas e iguales, por lo que podemos escribir que

$$F_c = F'_c = m_c R_c (2\dot{\theta}_2)^2$$

La proyección de estas dos fuerzas según la dirección O_2B , fig. 13, será:

$$F_c = F'_c = m_c R_c (2\dot{\theta}_2)^2 \cdot \cos 2\theta_2$$

y la resultante de las dos :

$$F = 2m_c R_c \cdot (2\dot{\theta}_2)^2 \cdot \cos 2\theta_2$$

Para que se cumpla $F = -F_{\text{sec}}$, se debe verificar

$$2m_c R_c (2\dot{\theta}_2)^2 \cdot \cos 2\theta_2 = m_B \frac{l_2^2}{4l_3} (2\dot{\theta}_2)^2 \cos 2\theta_2$$

y por tanto

$$m_c R_c = \frac{m_B l_2^2}{2 \cdot 4l_3}$$

Esta expresión permite determinar la masa para los contrapesos, si se elige R_c .

Con estos procedimientos, dependiendo del número de términos elegidos en el desarrollo del binomio de Newton, se pueden equilibrar las fuerzas de inercia de cualquier orden; pero su aplicación práctica conduce a utilizar mecanismos de un gran volumen.

