4. ESPACIOS VECTORIALES Y APLICACIONES LINEALES

SUMARIO:

OBJETIVOS

- Asimilar el concepto de espacio vectorial y las propiedades más notables que son consecuencia de los axiomas definitorios de la estructura.
- Reforzar el conocimiento de la estructura comprobando que son espacios vectoriales reales los conjuntos: $\mathbb{R}$, los polinomios en la indeterminada x con coeficientes números reales y de grado

menor o igual que n, las funciones reales continuas, las matrices reales de orden mxn etc.

- Obtener combinaciones lineales de vectores de un subconjunto dado en un espacio vectorial y conocer las propiedades que verifican. Decidir si un vector es expresable, o no, como combinación lineal de otros.
- Conocer la posibilidad de generar un subespacio vectorial a partir de un subconjunto cualquiera de vectores de un espacio vectorial.
- Decidir con soltura si un sistema de vectores es libre o ligado.
- Determinar con destreza el rango de un conjunto de vectores.
- Asimilar el concepto de base y dimensión para un subespacio y para el propio espacio.
- Decidir sobre la posibilidad de expresar un espacio vectorial como suma directa de dos subespacios propios.
- Manejar los cambios de bases.
- Verificar que un homomorfismo entre espacios vectoriales está determinado con sólo conocer las imágenes de los vectores de una base.
- Utilizar la correspondencia entre operaciones con aplicaciones lineales y operaciones con matrices.
- Decidir con soltura si un homomorfismo es inyectivo, sobreyectivo o biyectivo.

INTRODUCCIÓN TEÓRICA

1. ESPACIOS VECTORIALES

Sea K un cuerpo conmutativo con leyes suma y producto a cuyos elementos llamaremos escalares. Sea E un conjunto a cuyos elementos los llamaremos vectores, denotándolos $\overline{x}$, $\overline{y}$, etc.

E es un espacio vectorial sobre el cuerpo K si se verifica:

Existe una ley de composición interna en E, para la cuál E tiene estructura de grupo abeliano (denotaremos esta ley por suma y al elemento neutro por el vector $\overline{0}$), debiendo por tanto verificar:

$\overline{x}+\overline{y}\in E$, $\forall \overline{x}$, $\overline{y}\in E$ ($+$ es una ley de composición interna)

$\left(\overline{x}+\overline{y}\right)+\overline{z}=\overline{x}+\left(\overline{y}+\overline{z}\right)$, $\forall \overline{x}$, $\overline{y},\overline{z}\in E$ (propiedad asociativa)

$\overline{x}+\overline{y}=\overline{y}+\overline{x}$, $\forall \overline{x}$, $\overline{y}\in E$ (propiedad conmutativa)

$\forall \overline{x}\in E\Rightarrow \exists\ \overline{0}\in E:\overline{x}+\overline{0}=\overline{x}$ (el $\overline{0}$ es el elemento neutro).

$\forall \overline{x}\in E\Rightarrow \exists -\overline{x}\in E:\overline{x}+\left(-\overline{x}\right)=\overline{0}$ (existencia de elemento opuesto)

Existe sobre E una ley de composición externa, cuyo dominio de operadores es el cuerpo K, con las siguientes propiedades $(\forall \lambda,\mu\in K,\ \forall \overline{x},\overline{y}\in E)$:

(a) Distributiva respecto a la suma de escalares: $\left(\lambda+\mu\right)\overline{x}=\lambda\overline{x}+\mu\overline{x}$

(b) Distributiva respecto a la suma de vectores: $\lambda\left(\overline{x}+\overline{y}\right)=\lambda\overline{x}+\lambda\overline{y}$

(c) Asociativa respecto a los escalares: $\lambda\left(\mu\overline{x}\right)=\left(\lambda\mu\right)\overline{x}$

(d) Identidad: $1 \cdot \overline{x} = \mathbf{I}_E = \overline{x}$.

NOTA: Si no se hace mención contraria, K será el cuerpo de los números reales con las operaciones usuales, suma y producto en los números reales.

2. PROPIEDADES DE UN ESPACIO VECTORIAL

Las principales propiedades de un espacio vectorial son las siguientes:

$\forall \overline{x} \in E : 0 \cdot \overline{x} = \overline{0}$

$\forall \ \lambda \in K : \ \lambda \cdot \overline{0} = \overline{0}$

Si $\lambda \cdot \overline{x} = \overline{0} \Rightarrow \ \lambda = 0$ ó $\overline{x} = \overline{0}$

$\forall \ \lambda \in K, \ \forall \overline{x} \in E : (-\lambda)\overline{x} = -\lambda\overline{x} = \lambda\left(-\overline{x}\right)$

2.1. Sistema de Vectores

Un sistema de vectores es un conjunto (trabajaremos siempre con un número finito) de vectores, lo representaremos por: $S = \{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n\}$.

2.2. Combinación Lineal

Un vector $\overline{x} \in E$ es una combinación lineal de los vectores del sistema S si existen n escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$ tal que: $\overline{x} = \lambda_1 \overline{x}_1 + \lambda_2 \overline{x}_2 + \ldots + \lambda_n \overline{x}_n$. Los escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los "coeficientes" de la combinación lineal.

2.3. Sistemas linealmente dependientes o independientes

Un sistema $S = \{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n\}$ de vectores es linealmente independientes, si la condición $\overline{x} = \lambda_1 \overline{x}_1 + \lambda_2 \overline{x}_2 + \ldots + \lambda_n \overline{x}_n = \overline{0}$, implica necesariamente que: $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

En caso contrario, el sistema S es linealmente dependiente.

2.4. Proposición.

En un sistema linealmente independiente S la única posibilidad de conseguir una combinación lineal de vectores de S igualada al vector $\overline{0}$ es que todos los coeficientes de dicha combinación deben ser 0, no siendo así si el sistema linealmente dependiente.

3. Propiedades de los sistemas linealmente dependientes e independientes

Las principales propiedades de los sistemas linealmente dependientes o independientes son las siguientes:

$\overline{x} \neq \overline{0} \Rightarrow$ el sistema $S = \{\overline{x}\}$ es linealmente independiente.

Si un sistema S es linealmente independiente, cualquier sistema S' extraído de él ($S' \subset S$) también lo es.

Todo sistema S que contenga al vector $\overline{0}$ es linealmente dependiente

Si un sistema S es linealmente dependiente, todo sistema S' que lo contenga ($S' \supset S$) también lo es.

Si un sistema S es linealmente dependiente, al menos uno de los vectores de S es combinación lineal de los restantes vectores de S.

Si un sistema S es linealmente independiente y el sistema $S' = S \cup \{\overline{x}\}$ es linealmente dependiente, entonces el vector $\overline{x}$ es combinación lineal de los vectores de S.

3.1. V(S)

Si S es un sistema de vectores, $\langle S \rangle$ denotará el conjunto de vectores que son combinación lineal de vectores de S.

3.2. Sistemas Equivalentes

Dos sistemas de vectores S_1 y S_2 son equivalentes si $\langle S_1 \rangle = \langle S_2 \rangle$.

Las principales formas para obtener un sistema equivalente a uno dado son:

Añadir al sistema nuevos vectores que sean combinación lineal de los existentes.

Cambiando el orden de los vectores del sistema.

Multiplicando cualquier vector por un escalar distinto de 0.

Sumando a un vector del sistema otro del mismo multiplicado por cualquier escalar.

4. Subespacios Vectoriales. Operaciones con Subespacios

4.1. Subespacio vectorial

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Todo subconjunto V de E, que tenga estructura de espacio vectorial con las mismas leyes que E, diremos que es un subespacio vectorial de E.

4.2. Propiedad

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K y sea V un subconjunto de E, entonces V es un subespacio vectorial de E si y sólo si:

$\overline{x}+\overline{y}\in V, \quad \forall \overline{x},\overline{y}\in V$.

$\lambda\overline{x}\in V$, $\forall\overline{x}\in V$ y $\forall\lambda\in K$

Esta propiedad también se podría enunciar de la siguiente forma:

4.3. Propiedad:

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K y sea V un subconjunto de E, entonces V es un subespacio vectorial de E si y sólo si:

$\forall\lambda,\mu\in K, \forall\overline{x},\overline{y}\in V : \lambda\overline{x}+\mu\overline{y}\in V$

4.4. Intersección de Subespacios vectoriales

Dados dos subespacios vectoriales V_1 y V_2 de E se define su intersección como:

$V_1 \cap V_2 = \left\{\overline{x}\in E / \overline{x}\in V_1 \text{ y } \overline{x}\in V_2\right\}$

El conjunto $V_1 \cap V_2$ es un subespacio vectorial de E.

4.5. Subespacios Disjuntos

Dos subespacios vectoriales V_1 y V_2 son disjuntos si y sólo si $V_1 \cap V_2 = \left\{\overline{0}\right\}$.

4.6. Suma de subespacios vectoriales

Dados dos subespacios vectoriales V_1 y V_2 de E, se define su suma:

$V_1 + V_2 = \left\{ \overline{x} \in E \,/\, \overline{x} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2,\ \text{con } \overline{x}_1 \in V_1 \ \text{ y } \ \overline{x}_2 \in V_2 \right\}$

$V_1 + V_2$ es un subespacio vectorial.

Si $V_1 \cap V_2 = \left\{ \overline{0} \right\}$, la suma se llama directa y se denota por $V_1 \oplus V_2$.

Si $V_1 \oplus V_2 = E$, V_1 y V_2 se llaman subespacios suplementarios.

4.7. Propiedad

Si un espacio vectorial E es suma directa de dos subespacios V_1 y V_2, todo vector de E se puede expresar de forma única como suma de un vector de V_1 y otro de V_2.

Importante: La unión de subespacios vectoriales no es en general subespacio vectorial.

4.8. Sistema generador

Un sistema S de vectores de V es un sistema generador del subespacio vectorial $V \subset E$ si $\langle S \rangle = V$.

NOTAS: Las formas más usuales de expresar un subespacio V suelen ser:

Dando un sistema S generador de V , es decir, $\langle S \rangle = V$.

Dando las ecuaciones ”implícitas” , que equivale a dar restricciones a las ”coordenadas” de los vectores de E para que estén en V .

Por ejemplo, si $E = \mathbb{R}^3$, podemos considerar el subespacio $V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ x + y + z = 0 \right\}$

Dando las ecuaciones paramétricas, que expresan las coordenadas de los vectores de V en función de parámetros que pueden tomar cualquier valor de los escalares de K.

Por ejemplo, si $E = \mathbb{R}^3$, podemos considerar el subespacio

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{array}{l} x = \lambda + \beta \\ y = \lambda \\ z = \beta \end{array} \quad : \lambda, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

El paso de unas a otras se realiza de forma cómoda por medio de la teoría de sistemas de ecuaciones lineales que veremos posteriormente.

5. BASES DE UN ESPACIO VECTORIAL. DIMENSIÓN

5.1. Base de un espacio vectorial

Una base de un espacio vectorial E es cualquier sistema S de vectores libres que sean generadores de E.

5.2. Teorema

Todo espacio vectorial admite al menos una base

NOTA:

Un espacio que admite un sistema finito de generadores se dice que es de tipo finito o finitamente generado.

5.3. Teorema

En un espacio vectorial de tipo finito todas las bases son finitas y tienen el mismo número de elementos.

5.4. Dimensión

Al número de elementos de una base de un espacio vectorial de tipo finito, se le llama dimensión del espacio vectorial.

5.5. Teorema

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $B=\{\overline{v}_1,\overline{v}_2,\cdots,\overline{v}_n\}$ una base suya. Si divido B en dos sistemas de vectores disjuntos $B=B_1\cup B_2$, entonces se cumple que $\langle B_1\rangle\oplus\langle B_2\rangle=V$. Es decir, los subespacios generados por los sistemas B_1 y B_2 son suplementarios.

5.6. Coordenadas de un vector en una base

Sea $B=\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_n\}$ una base del espacio vectorial E y $\overline{x}\in E$. Si $\overline{x}=x_1\overline{e}_1+x_2\overline{e}_2+\ldots+x_n\overline{e}_n$ se dice que $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ son las coordenadas del vector $\overline{x}$ en la base B.

Las coordenadas de un vector respecto de una base son únicas.

NOTA: Un vector tiene tantas coordenadas como la dimensión del mayor espacio vectorial al que pertenece.

En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^n$ la base $B=\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_n\}$ con $\overline{e}_1^{\,t}=(1 0\ldots 0)$, $\overline{e}_2^{\,t}=(0\ 1\ 0\ldots 0),\ldots,\ \overline{e}_n^{\,t}=(0\ 0\ldots 0\ 1)$ la llamaremos base canónica.

5.7. Rango de un sistema de vectores.

El rango de un sistema S de vectores es la dimensión del subespacio $\langle S \rangle$ engendrado por S. Es decir, es el máximo número de vectores linealmente independientes de S.

Otro procedimiento para calcular el rango de un sistema de vectores S es construir una matriz situando las coordenadas de cada uno de los vectores de S en columnas, es decir, si $S = \{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_p\}$, la matriz asociada es

$$A = [\overline{x}_1\ \overline{x}_2 \ldots \overline{x}_p],\ \text{siendo}\ \overline{x}_i = \begin{pmatrix} x_i^1 \\ x_i^2 \\ \vdots \\ x_i^n \end{pmatrix},\ \forall i = 1, 2, \ldots, p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dim(\langle S \rangle) = rang(S) = rang(A)$$

5.8. Base Incompleta

Sea E un espacio vectorial de dimensión n y V un subespacio vectorial de E de dimensión m. Si $B = \{\overline{c}_1, \overline{c}_2, \ldots, \overline{c}_m\}$ es una base de V, se puede encontrar una base B' de E ampliando la de V, es decir:

$$B' = \{\overline{c}_1, \overline{c}_2, \ldots, \overline{c}_m, \overline{e}_{m+1}, \overline{e}_{m+2}, \ldots, \overline{e}_n\}$$

6. Relación entre dimensiones

Si V es un subespacio vectorial de E, $\dim(V) \leq \dim(E)$.

Si $V = \{\overline{0}\}$, $\dim(V) = 0$.

Si V_1 y V_2 son subespacios vectoriales de V se tiene que:

$$\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1)+\dim(V_2)-\dim(V_1\cap V_2)\ \equiv$$

$\equiv$ Fórmula de Grassman

En particular se tiene que si V_1 es suma directa con V_2 :

$$\dim(V_1\oplus V_2)=\dim(V_1)+\dim(V_2)$$

7. Cambio de base

Sea E un espacio vectorial de $\dim(E)=n$, sean $B=\{\overline{v}_1,\overline{v}_2,\ldots,\overline{v}_n\}$ y $B'=\{\overline{u}_1,\overline{u}_2,\ldots,\overline{u}_n\}$ dos bases de E. Supongamos que el vector $\overline{x}\in E$, tiene de coordenadas $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ respecto de la base B y tiene unas coordenadas $(x_1',x_2',\ldots,x_n')$ respecto de la base B'. Vamos a estudiar cómo se pueden obtener las coordenadas de un vector en una base conociendo sus coordenadas en la otra base.

Por ser B' base de E, sus elementos son vectores de E, por lo que se podrán expresar como combinación lineal de los vectores de la base B:

$$\overline{u}_1=a_{11}\overline{v}_1+a_{21}\overline{v}_2+\cdots+a_{n1}\overline{v}_n$$

$$\overline{u}_2=a_{12}\overline{v}_1+a_{22}\overline{v}_2+\cdots+a_{n2}\overline{v}_n$$

$$\vdots$$

$$\overline{u}_n=a_{1n}\overline{v}_1+a_{2n}\overline{v}_2+\cdots+a_{nn}\overline{v}_n$$

Sabemos que $\overline{x}=x_1\overline{v}_1+x_2\overline{v}_2+\ldots+x_n\overline{v}_n$ y $\overline{x}=x_1'\overline{u}_1+x_2'\overline{u}_2+\ldots+x_n'\overline{u}_n$. Si sustituimos los datos conocidos obtenemos que:

$$\overline{x}=x_1'\overline{u}_1+x_2'\overline{u}_2+\ldots+x_n'\overline{u}_n=$$

$$= x_1' \left(a_{11}\overline{v}_1 + a_{21}\overline{v}_2 + \cdots + a_{n1}\overline{v}_n \right) + x_2' \left(a_{12}\overline{v}_1 + a_{22}\overline{v}_2 + \cdots + a_{n2}\overline{v}_n \right) +$$

$$+ \cdots + x_n' \left(a_{1n}\overline{v}_1 + a_{2n}\overline{v}_2 + \cdots + a_{nn}\overline{v}_n \right) =$$

$$= \left(x_1' a_{11} + x_2' a_{12} + \cdots + x_n' a_{1n} \right) \overline{v}_1 + \left(x_1' a_{21} + x_2' a_{22} + \cdots + x_n' a_{2n} \right) \overline{v}_2 +$$

$$+ \cdots + \left(x_1' a_{n1} + x_2' a_{n2} + \cdots + x_n' a_{nn} \right) \overline{v}_n =$$

$$= x_1\overline{v}_1 + x_2\overline{v}_2 + \ldots + x_n\overline{v}_n$$

De todas estas igualdades obtenemos que si igualamos coordenada a coordenada, queda la siguiente relación:

$$\left.\begin{array}{c} x_1 = x_1' a_{11} + x_2' a_{12} + \cdots + x_n' a_{1n} \\ x_2 = x_1' a_{21} + x_2' a_{22} + \cdots + x_n' a_{2n} \\ \vdots \\ x_n = x_1' a_{n1} + x_2' a_{n2} + \cdots + x_n' a_{nn} \end{array}\right\} \equiv \text{Ecuaciones del Cambio de Base}$$

Expresando este sistema de forma matricial, quedaría:

$$\overline{x} = P\overline{x}' \equiv \text{Ecuación Matricial del Cambio de Base}$$

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \overline{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \equiv \text{Matriz Cambio de Base de}$$

B' a B, sus columnas son las coordenadas de los vectores de la base B' respecto de la base B.

7.1. Espacio Vectorial Producto

Sean E y F espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K.

Al conjunto $E \times F$ le dotamos de estructura de espacio vectorial con las leyes:

$$\left(\overline{u}_1,\overline{u}_2\right)+\left(\overline{v}_1,\overline{v}_2\right)=\left(\overline{u}_1+\overline{v}_1,\overline{u}_2+\overline{v}_2\right);\ \forall\overline{u}_1,\overline{v}_1\in E;\ \ \forall\overline{u}_2,\overline{v}_2\in F$$

$$\lambda\left(\overline{u},\overline{v}\right)=\left(\lambda\overline{u},\lambda\overline{v}\right);\ \forall\lambda\in K;\ \ \forall\overline{u}\in E;\ \forall\overline{v}\in F$$

Dicho espacio vectorial se denomina espacio vectorial producto de E y F.

Siendo $\left\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_n\right\}$ una base de E y $\left\{\overline{w}_1,\overline{w}_2,\ldots,\overline{w}_m\right\}$ una base de F, la dimensión $E\times F$ es $n+m$ y una base de $E\times F$ puede ser:

$$\left\{(\overline{e}_1,0),(\overline{e}_2,0),\ldots,(\overline{e}_n,0),(0,\overline{w}_1),(0,\overline{w}_2),\ldots,(0,\overline{w}_m)\right\}$$