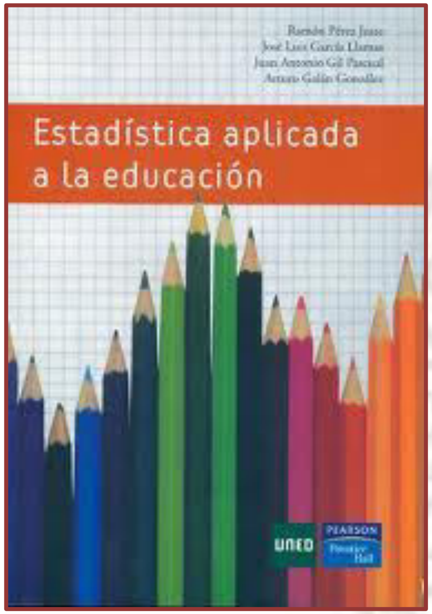
Estadística Aplicada a la Educación

Tema 9

Tutor.
UNED Madrid-Sur (A.U. Parla)
Miguel Ángel Daza
migdaza@madridsur.uned.es

Estadística Aplicada a la Educación

Índice



- 9.1 Presentación
- 9.2 Introducción
- 9.3 Modelo
  - 9.3.1 Utilidad de los modelos
  - 9.3.2 Modelos matemáticos y modelos estadísticos
- 9.4 Probabilidad
  - 9.4.1 La estadística
  - 9.4.2 La probabilidad
    - 9.4.2.1 Probabilidad a priori y a posteriori
  - 9.4.3 Cálculo de la probabilidad
    - 9.4.3.1 El caso de las variables aleatorias continuas y discretas
- 9.5 Algunas funciones de densidad de probabilidad
  - 9.5.1 Función de densidad de probabilidad normal
  - 9.5.2 Función de densidad de probabilidad X2 (Ji Cuadrado)
  - 9.5.3 Función de densidad de probabilidad T (t de Student)
  - 9.5.4 Función de densidad de probabilidad F
- 9.6 La curva normal de probabilidades
  - 9.6.1 El modelo
  - 9.6.2 La prueba de bondad de ajuste
  - 9.6.3 La prueba de Ji Cuadrado

9. MODELOS ESTADÍSTICOS Y PROBABILIDAD. LA CURVA NORMAL DE PROBABILIDADES.

9.1 Presentación.

En muchas ocasiones necesitamos acercarnos a la realidad pero ésta a veces es difícilmente apreciable por su complejidad, por su dimensión…. En estos casos el hombre necesita contar con alguna forma intuitiva de acercarse a la misma.

Los MODELOS

Los **modelos** cumplen la función de permitirnos adentrarnos en la comprensión de la realidad, acercarnos a su explicación e incluso tomar decisiones en el campo de la prueba de hipótesis.

9.2 Introducción.

modelo.

(Del it. *modello*).

1. m. Arquetipo o punto de referencia para imitarlo o reproducirlo.

2. m. En las obras de ingenio y en las acciones morales, ejemplar que por su perfección se debe seguir e imitar.

3. m. Representación en pequeño de alguna cosa.

4. m. Esquema teórico, generalmente en forma matemática, de un sistema o de una realidad compleja, como la evolución económica de un país, que se elabora para facilitar su comprensión y el estudio de su comportamiento.

5. m. Objeto, aparato, construcción, etc., o conjunto de ellos realizados con arreglo a un mismo diseño. *Auto modelo 1976. Lavadora último modelo.*

6. m. Vestido con características únicas, creado por determinado modista, y, en general, cualquier prenda de vestir que esté de moda.

7. m. En empresas, u. en aposición para indicar que lo designado por el nombre anterior ha sido creado como ejemplar o se considera que puede serlo. *Empresa modelo. Granjas modelo.*

8. m. *Esc.* Figura de barro, yeso o cera, que se ha de reproducir en madera, mármol o metal.

9. m. *Cuba.* impreso (‖ hoja con espacios en blanco).

10. com. Persona de buena figura que en las tiendas de modas se pone los vestidos, trajes y otras prendas para que las vean los clientes.

11. com. *Esc.* y *Pint.* Persona u objeto que copia el artista.

REAL ACADEMIA ESPAÑOLA

9.2 Introducción.

Entre la multitud de significados del término **modelo** podemos decir que es:

un esquema teórico, generalmente en forma matemática, de un sistema o de una realidad compleja, que se elabora para facilitar su comprensión y el estudio de su comportamiento.

Un modelo debe representar fielmente la realidad a la que se refiere. Un modelo debe ser útil y comprobable. El modelo en tanto teoría tiene la característica de su comprobabilidad. Así pues cuando se repite un procedimiento empírico, como es el contraste de hipótesis, cabe esperar unos resultados compatibles con los primeros (decimos compatibles y no iguales porque nunca trabajamos con todos los casos, sino con muestras del total y porque los instrumentos utilizados de medida no son perfectos, por lo que siempre debemos contar con un margen de error).

9.3 Modelo.

En nuestro caso, como es el **estudio de fenómenos humanos**, nos centraremos en el concepto de **modelo estadístico**, donde la **probabilidad** juega un papel decisivo.

Modelo es una representación simplificada de la realidad a la que se refiere.

A su vez, el modelo puede representarse de varias formas:

- representación **icónica** →una escultura, un cuadro, etc.
- representación **matemática** →mediante fórmulas se establece una igualdad más o menos compleja.
- representación **analógica** →con esquemas, diagramas, etc., podemos entender la realidad abstracta y muchas veces solo observable mediante el uso de aparatos complejos. Por ejem.: el sistema solar, el átomo.

Utilidad: "***Siempre que se cumpla que una realidad es razonablemente bien representada por un modelo, las cualidades de éste, con una base teórico-científica, se pueden aplicar a aquella".***

9.3.1 Utilidad de los modelos.

En el campo humano la utilidad de los modelos es que podemos **predecir**, eso sí, en términos de **probabilidad**, el porcentaje de incidencia de un determinado fenómeno. Así, si somos capaces de establecer modelos suficientemente cercanos a la realidad, podremos hacer predicciones como el porcentaje de suspensos en el aula, de niños violentos… en una determinada población escolar.

9.3.2 Modelos matemáticos y modelos estadísticos .

La diferencia entre **modelo matemático** y **modelo estadístico** es que en el estadístico se incorpora el componente fundamental de **probabilidad**.

Un modelo matemático se expresa mediante igualdades que reflejan la relación existente entre los componentes de la realidad. Un modelo matemático clave en nuestro campo es la campana de Gauss.

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{\frac{-(\mu - x)^2}{2\sigma^2}}$$

En **un modelo estadístico** la relación entre los términos de la igualdad no son **determinísticas** o necesarias sino **estocásticas**, es decir que toda predicción asume un cierto riesgo de error, que se considera aleatorio. Los errores aleatorios tienden a compensarse y su magnitud puede estimarse.

$$(Y_1, Y_2, \ldots, Y_i) = f(Y_1, Y_2, \ldots, Y_i) + e$$

ERROR

9.4 Probabilidad.

9.4.1 La estadística.

(Kerlinger 1975): "***la estadística es la teoría y el método de analizar datos cuantitativos obtenidos de muestras de observaciones para estudiar y comparar fuentes de varianza de fenómenos, ayudar a tomar decisiones sobre aceptar o rechazar relaciones hipotéticas entre los fenómenos y ayudar a hacer inferencias fidedignas de observaciones empíricas".***

Para Kerlinger: ***"El principio básico de las pruebas estadísticas de significación puede resumirse en una sentencia: comparar los resultados obtenidos con los esperados al azar".***

Cuando los resultados de una prueba estadística vayan más allá de lo esperado por puro azar, se aceptará que el fenómenos en cuestión no se explica por azar sino por la acción del investigador, sometida a contraste en condiciones controladas y analizada mediante tal prueba. De ahí la importancia del conocimiento de los fenómenos aleatorios.

9.4 Probabilidad.

9.4.2 La probabilidad.

Mientras que los **fenómenos determinísticos** son fenómenos que **ocurren porque tienen que ocurrir** necesariamente, los **fenómenos aleatorios, ocurrirán o no**, y antes de que ocurran pueden ser más o menos probables. Por lo que podemos afirmar que **aleatoriedad y probabilidad son dos conceptos íntimamente ligados**.

Probabilidad a priori y a posteriori

La probabilidad a priori es la **estimación** de probabilidades de que ocurra o no un fenómeno antes de que ocurra (**predicción**). Se establece sobre la base del número de casos favorables dividido por el de casos posibles.

La probabilidad a posteriori es la probabilidad de ocurrencia de tal fenómeno. En este caso la probabilidad **se calcula empíricamente** y se traduce en la **frecuencia relativa** con la que ocurre un fenómeno cuando se repite un elevado número de veces en las mismas condiciones.

9.4.3 Cálculo de la probabilidad.

ESPACIO MUESTRAL → es el conjunto de todos los resultados posibles de un fenómeno. Cuando dos conjuntos, A y B, no tienen elementos en común, decimos que ; $A \cap B = \varnothing$ y se lee "A intersección con B, es igual al conjunto vacío". Entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Pero esto no es lo normal, pues se da con bastante frecuencia que dos ó más conjuntos tengan elementos en común y entonces decimos que $A \cap B \neq \varnothing$, luego

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

El fenómeno de la **EXHAUSTIVIDAD** ó **AGOTAMIENTO** se produce cuando los diferentes subconjuntos que puedan crearse, son subconjuntos del espacio muestral y todos ellos juntos lo agotan, lo completan plenamente.

Hablamos de **MUTUA EXCLUSIÓN** cuando dos acontecimientos distintos no tienen ningún elemento en común, es decir, su intersección es el Ø. Como en tal caso , $A \cap B = \varnothing$ las probabilidades de cada subconjunto pueden sumarse.

9.4.3 Cálculo de la probabilidad.

LA **INDEPENDENCIA** supone que la probabilidad de que ocurra el fenómeno conjunto, es igual al producto de las probabilidades de cada uno por separado. Entonces:

$$P(A \bigcap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Esta es una de las condiciones o supuestos que se han de verificar para la aplicación de las pruebas denominadas paramétricas en el contraste de hipótesis.

Concepto de **PROBABILIDAD CONDICIONAL**.

En nuestro ámbito de trabajo es bastante frecuente encontrarnos con fenómenos relacionados, es decir, que **no son independientes**. Como en este caso, $A \bigcap B \neq \varnothing$, la probabilidad condicional nos sitúa ante un caso en el que deseamos conocer la probabilidad de un determinado acontecimiento ó suceso cuando la probabilidad del otro es conocida.

$$P(A \setminus B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)}$$

EXTRA

Espacio Muestral.

•**Espacio Muestral (Ω)**: El conjunto de todos los resultados posibles diferentes de un determinado experimento aleatorio.

•**Sucesos elementales**: Cada uno de los elementos del Espacio Muestral.

•Los espacios Muestrales puede ser **finitos** (o numerables) o **continuos** (un intervalo).

•**Sucesos**: son los subconjutos de Ω y su medida de incertidumbre, es su probabilidad.

EXTRA

Espacio Muestral.

- Asociado a un experimento hay tres conjuntos de elementos:
  - El **Espacio Muestral** (Ω)
  - La clase de **sucesos**. (A)
  - Una **función P**:A→[0,1] que asigna a cada suceso (elemento de A) un número entre 0 y 1, como medida de su incertidumbre.

EXTRA

Espacio Muestral.

•La clase de sucesos, *A*. Tendrá un estructura que permita hablar no sólo de sucesos sino también de su:

– **unión**,

–**intersección**,

–**diferencia**,

–**complementario**,

etc. Por lo que *A* debe ser cerrada a dichas operaciones entre conjuntos (entre sucesos).

EXTRA

Espacio Muestral.

•Peculiaridades del Cálculo de Probabilidades:

•**Suceso Imposible** → conjunto vacío (Ø)

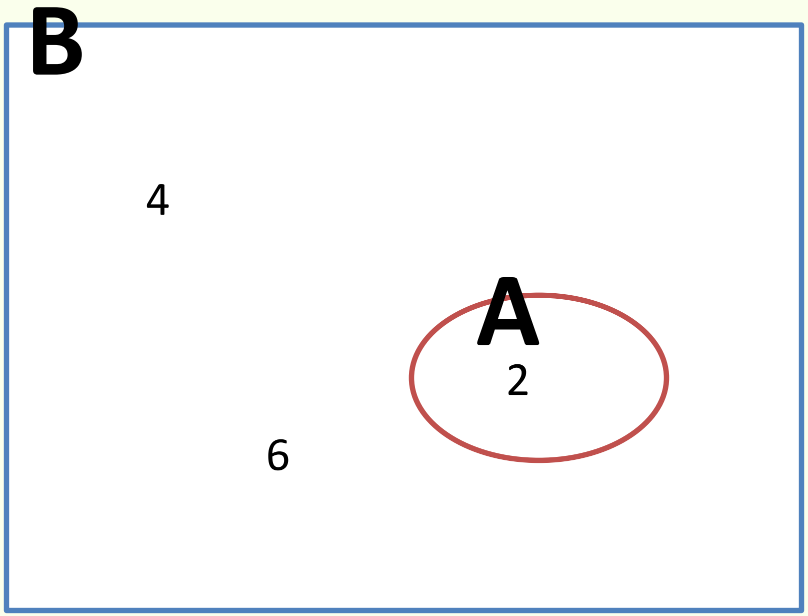
•**Suceso Seguro** → espacio muestral (Ω)

•**Sucesos incompatibles** → $A, B / (A \cap B) = \varnothing$

• La **inclusión de sucesos** $A \subset B$ se interpreta como que siempre que se cumpla el suceso A, se cumple el suceso B.

EXTRA

Espacio Muestral.



Se A el suceso "*que salga un dos*", y sea B el suceso "*que salga Par*" (al lanzar un dado)

A está incluido en B, $A \subset B$

ya que si se cumple A ("sale un dos") se cumple B (sale Par")

Conceptos de Probabilidad.

Definición formal de Probabilidad

Kolmogorov llama Probabilidad a una aplicación. $P : \mathcal{A} \rightarrow [0,1]$

Tal que:

- Axioma 1: Para todo suceso A de $\mathcal{A}$ sea P(A)≥0
- Axioma 2: Sea P(Ω)=1
- Axioma 3: Para toda colección de sucesos incompatibles

$$\{A_i\}\ con\ A_i \cap A_j = \varnothing,\ con\ i \neq j$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

EXTRA

Propiedades elementales de la Probabilidad.

•Toda probabilidad cumple una serie de propiedades derivadas de los axiomas.

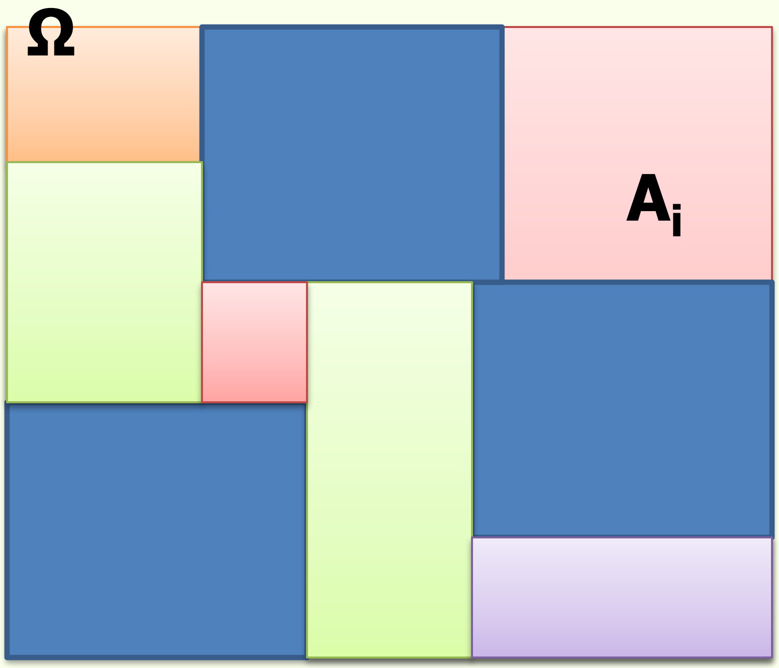
$a)\ P(\varnothing)=0$

$$P(\Omega)=1$$

EXTRA

Propiedades elementales de la Probabilidad.

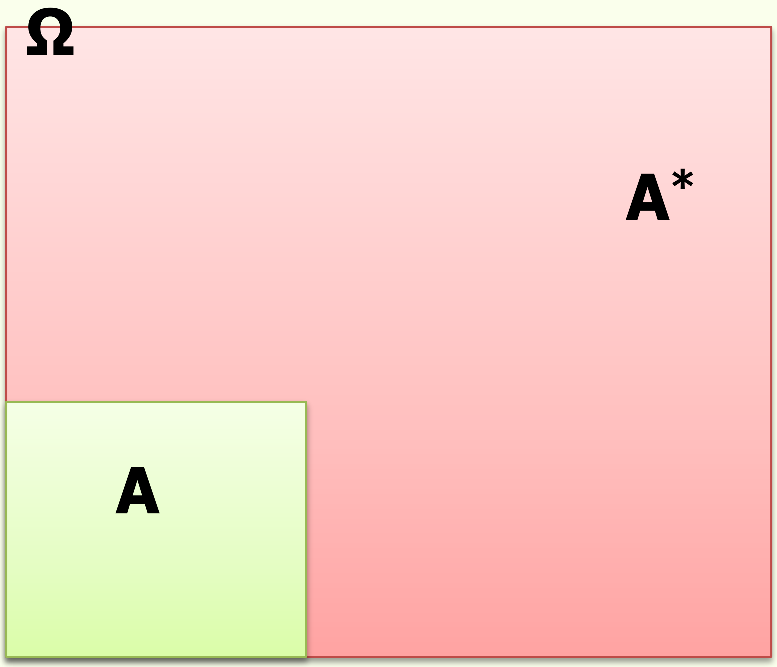
$$b)\ P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)\ \ si\ A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j$$



EXTRA

Propiedades elementales de la Probabilidad.

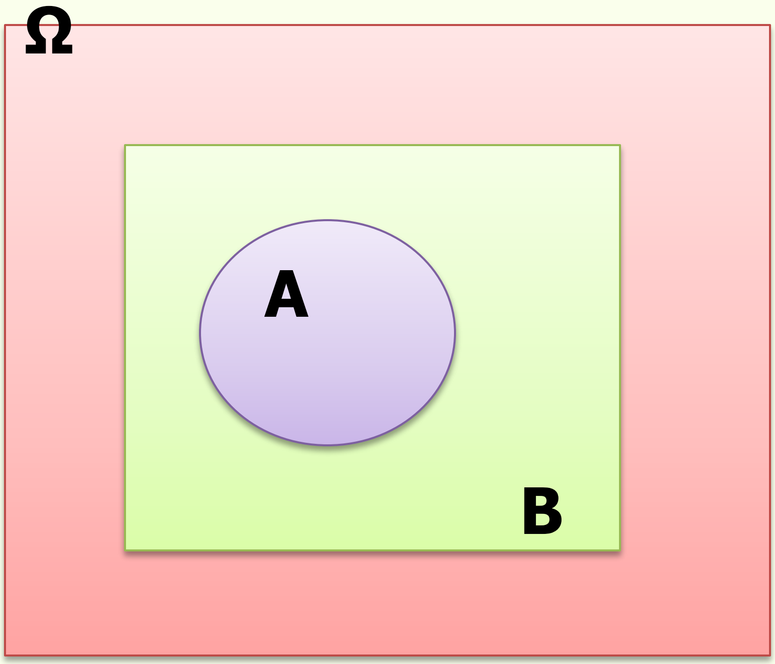
$$c)\ P(A^{*}) = 1 - P(A)$$



EXTRA

Propiedades elementales de la Probabilidad.

$d)$ sean $A \subset B$, entonces $P(A) \leq P(B)$

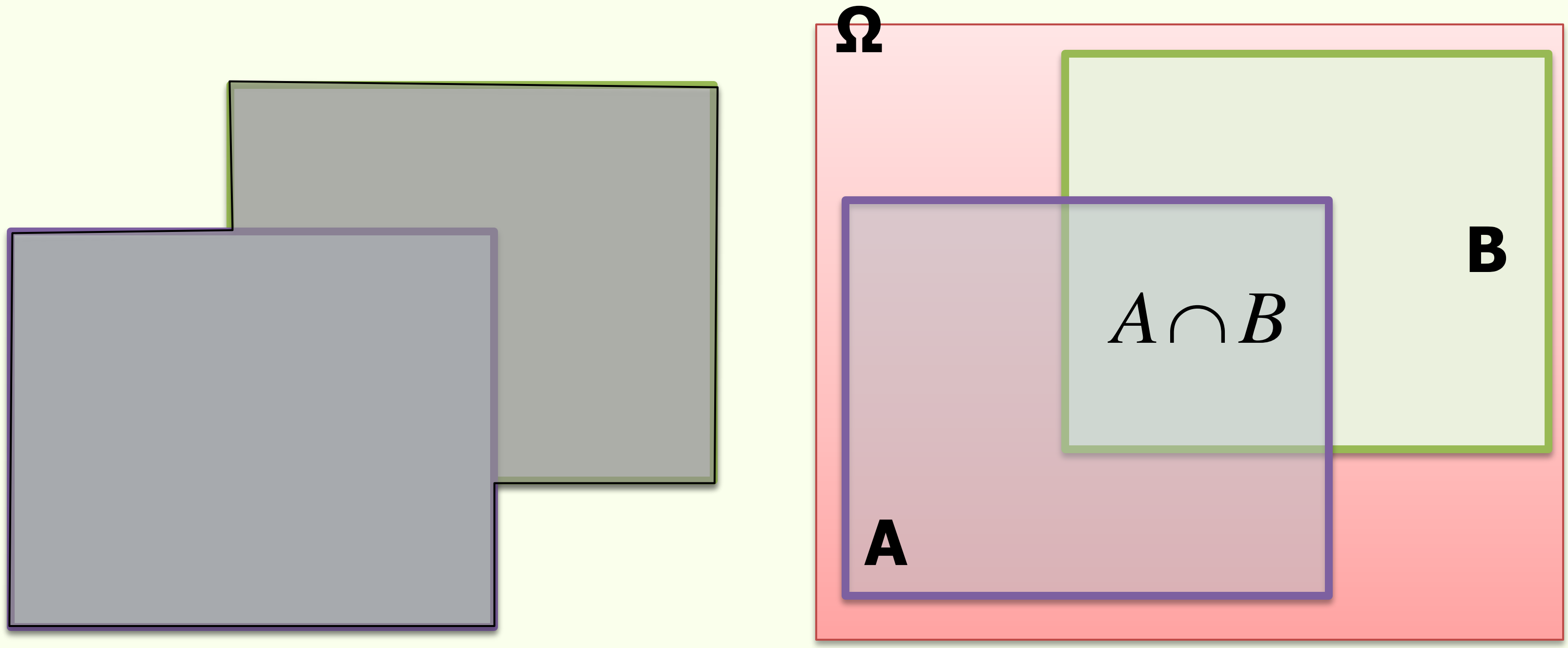


EXTRA

Propiedades elementales de la Probabilidad.

$e)$ sean A, B, con $A \cap B \neq \varnothing$ entonces

$$\mathrm{P(A \cup B)} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



EXTRA

Modelo Uniforme.

•Por eso si un suceso A es unión de k sucesos elementales será:

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{casos\ favorables\ a\ A}{casos\ posibles}$$

•Con lo que, en definitiva, el cálculo de probabilidades de sucesos en un modelo uniforme se limitará a contar el número de casos favorables a dicho suceso y el número de casos posibles.

EXTRA

Probabilidad condicionada.

Dado un espacio probabilístico (Ω, A, P) y un suceso B∈A tal que P(B)>0, llamaremos Probabilidad Condicionada del suceso A por el suceso B a:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = P(B/A) \cdot P(A)$$

$$P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

EXTRA

Independencia de sucesos.

Cuando el suceso B no altera para nada el cálculo de la probabilidad de otro suceso A, se dice que **A es independiente de B.**

$$P(A/B) = P(A)$$

$$P(B/A) = \frac{P(A/B) \cdot P(B)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B)$$

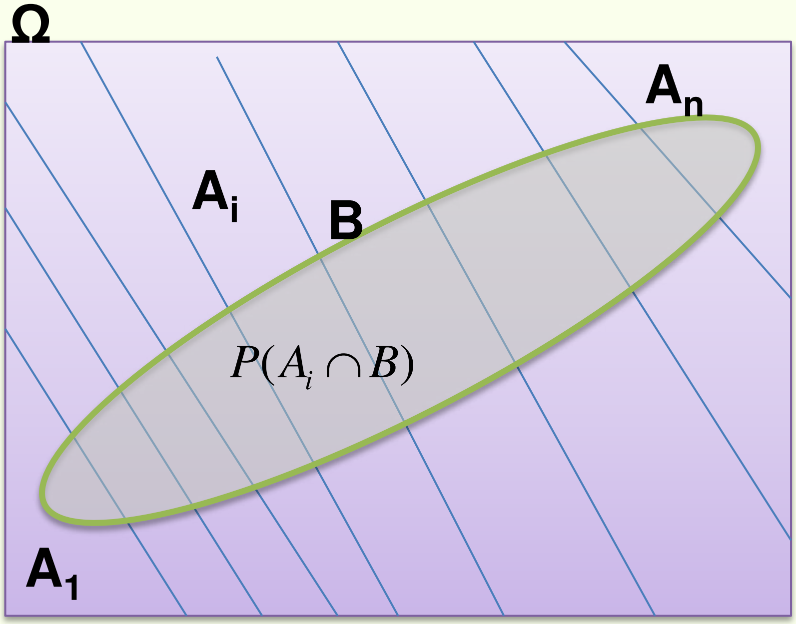
Definición:

Dos sucesos A y B de un mismo espacio probabilístico (Ω, A, P) se dicen independientes cuando:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

EXTRA

Teorema de la Probabilidad Total.



$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$$

$$A_i \cap A_j = \varnothing, \mathrm{i} \neq \mathrm{j}$$

$$B = (A_1 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B) = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)$$

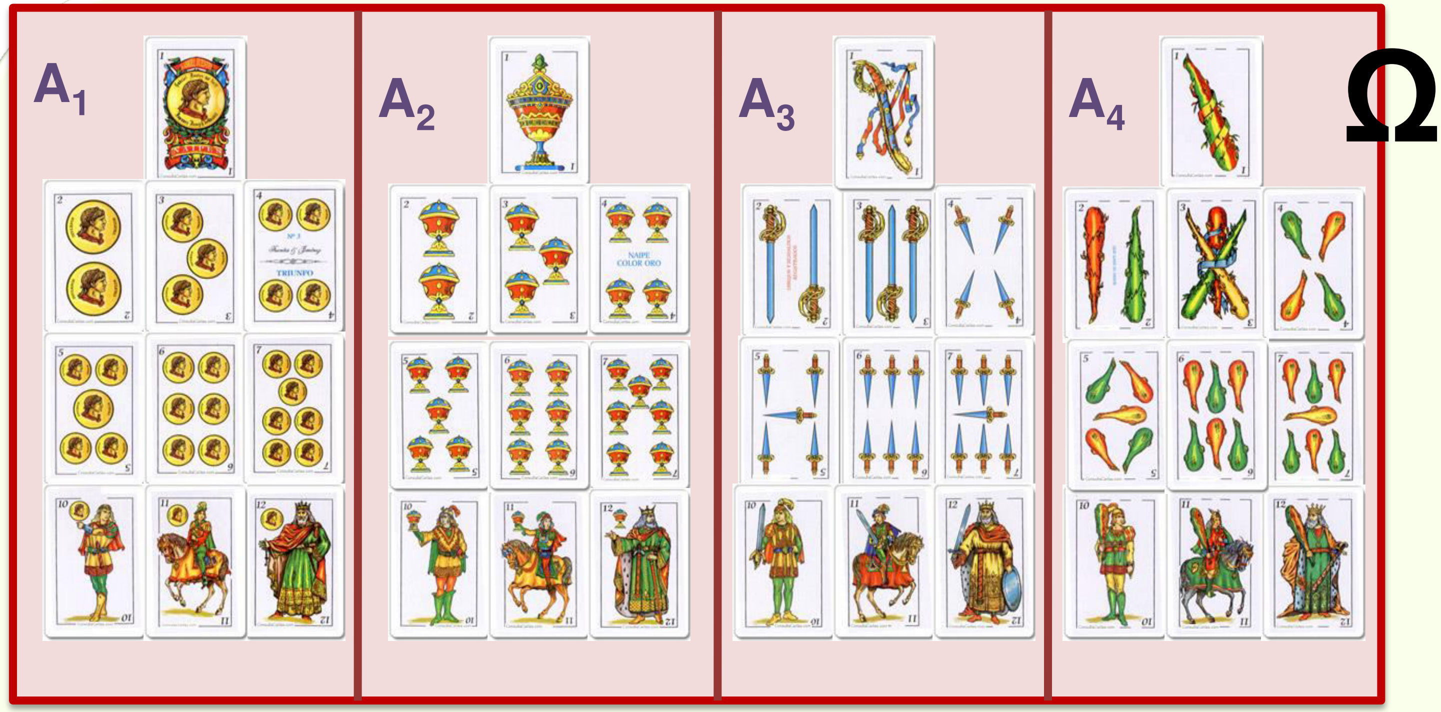
$$P(A_i \cap B) = P(B \cap A_i) = P(B / A_i) * P(A_i)$$

$$P(B) = P(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(B / A_i) * P(A_i)$$

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B / A_i) \cdot P(A_i)}$$

EXTRA

Teorema de la Probabilidad Total.



$$A_1 = \text{"Que salga Oros"}$$
$$A_2 = \text{"Que salga Copas"}$$
$$A_3 = \text{"Que salga Espadas"}$$
$$A_4 = \text{"Que salga Bastos"}$$

$$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

EXTRA

Teorema de la Probabilidad Total.

Hallar la probabilidad de que salga una figura (suceso B)

$$P(B)$$

$$A_1 = \text{"}Que \text{ salga Oros"}$$

$$A_2 = \text{"}Que \text{ salga Copas"}$$

$$A_3 = \text{"}Que \text{ salga Espadas"}$$

$$A_4 = \text{"}Que \text{ salga Bastos"}$$

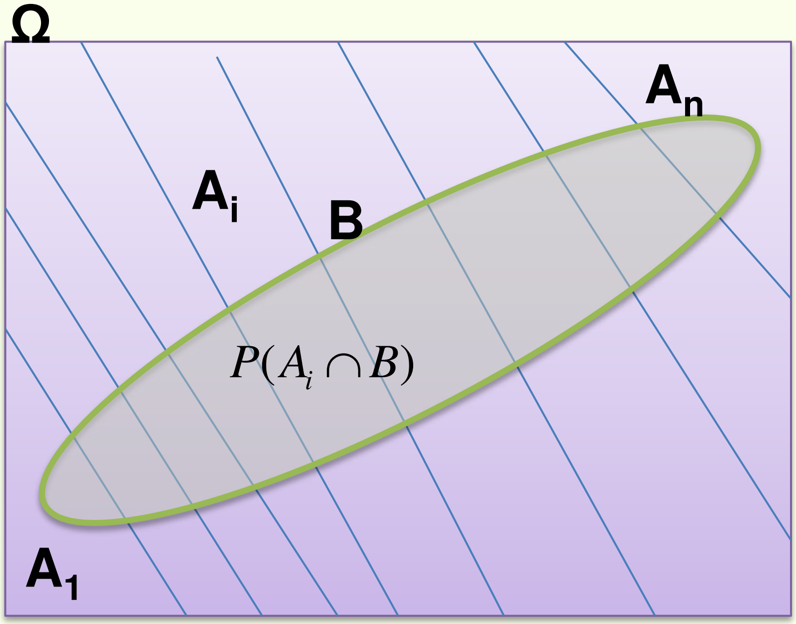
Teorema de la Probabilidad Total.

Hallar la probabilidad de que salga una figura (suceso B)

$$P(B)$$

$$P(B)=\sum_{i=1}^{4}P(B/A_i)\cdot P(A_i)=\left(\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{4}\right)=4\cdot\left(\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{10}$$

Teorema de Bayes.



$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega \qquad A_i \cap A_j = \varnothing, \mathrm{i} \neq \mathrm{j}$$

$$B = (A_1 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B) = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)$$

$$P(A_i \cap B) = P(B \cap A_i) = P(B / A_i) * P(A_i)$$

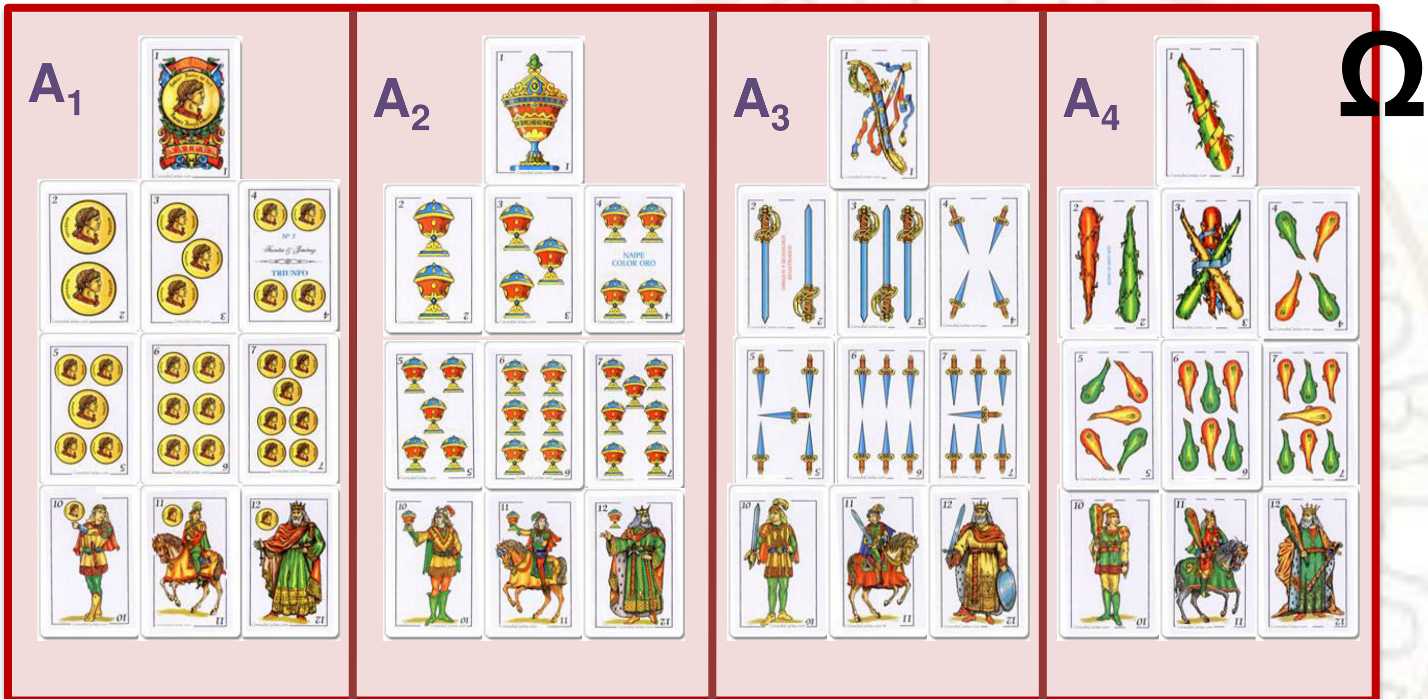
$$P(B) = P(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(B / A_i) * P(A_i)$$

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} = \frac{P(B / A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B / A_i) \cdot P(A_i)}$$

$$\boxed{P(A_i / B) = \frac{P(B / A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B / A_i) \cdot P(A_i)}}$$

EXTRA

Teorema de Bayes.



$$A_1 = \text{"}Que \text{ salga Oros"}$$

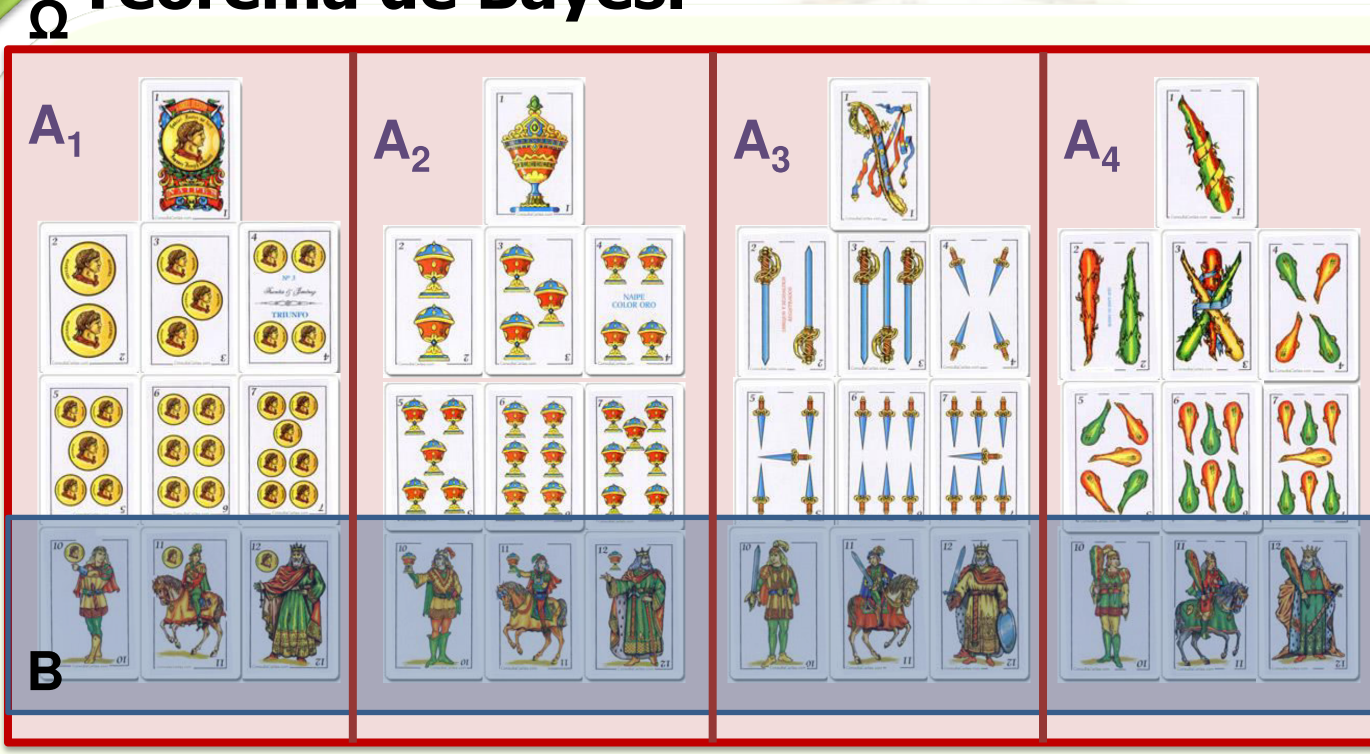
$$A_2 = \text{"}Que \text{ salga Copas"}$$

$$A_3 = \text{"}Que \text{ salga Espadas"}$$

$$A_4 = \text{"}Que \text{ salga Bastos"}$$

$$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

Teorema de Bayes.



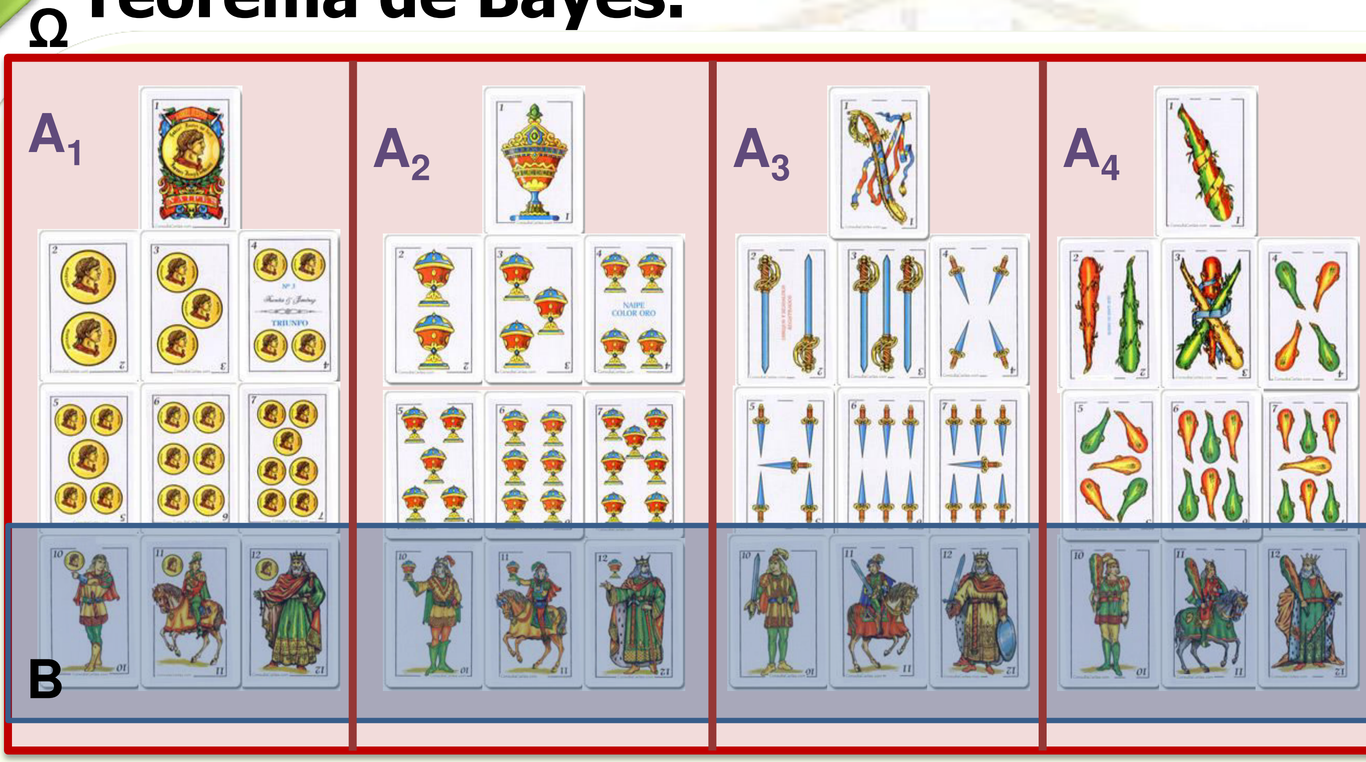
$$P(A_1 / B)$$

Hallar la probabilidad que habiendo salido una figura (**suceso B**) la carta sea del palo "**Oros**" (**suceso A_1**)

$$A_1 = \text{"}Que \text{ salga Oros"}$$
$$A_2 = \text{"}Que \text{ salga Copas"}$$
$$A_3 = \text{"}Que \text{ salga Espadas"}$$
$$A_4 = \text{"}Que \text{ salga Bastos"}$$

EXTRA

Teorema de Bayes.



$$P(A_1/B)$$

Hallar la probabilidad que habiendo salido una figura (**suceso B**) la carta sea del palo **"Oros"** (**suceso A_1**)

$$P(A_1/B)=\frac{P(B/A_1)\cdot P(A_1)}{\sum_{i=1}^{4}P(B/A_i)\cdot P(A_i)}=\frac{\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{4}}{\left(\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{4}\right)}=\frac{\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{4}}{4\cdot\left(\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{4}\right)}=\frac{\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{4}$$

9.4.3.1 El caso de las variables aleatorias continuas y discretas.

Para el cálculo del espacio muestral debemos distinguir las **variables aleatorias discretas** de las **aleatorias continua**s.

- **Variable cuantitativa discreta**: cuando no puede adquirir todos los valores posibles. Ej. nº de alumnos de una clase. 30
- **variable cuantitativa continua**: admite un número "no numerable de casos o valores. Ej. calificaciones de los alumnos: 5, 65

Las variables cuantitativas se pueden representar mediante histogramas. Estos histogramas tienen las siguientes cualidades:

. El área ocupada por esas representaciones tiene como valor la unidad

. En todos los casos, las representaciones tienen siempre valores positivos, no presentan valores por debajo del eje de abscisas.

. Cuando la representación del histograma, con barras de base más o menos amplia, el eje de abscisas representa una variable aleatoria discreta. Cuando la base son puntos y la representación es una curva, estamos ante una variable aleatoria continua.

9.4.3.1 El caso de las variables aleatorias continuas y discretas.

Estas cualidades van a permitir establecer Dos valores de probabilidad**: Función de densidad de probabilidad** y **función de distribución**

-**La Función de densidad de probabilidad** de una variable aleatoria continua cumple la función de no ser negativa y de que el área total es igual a la unidad.

$$f(x) \geq 0; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

-**La función de distribución** de una variable aleatoria continua nos permite establecer la probabilidad de que X tome valores iguales o menores que x

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

- Tal **probabilidad será mayor que 0 y menor que 1.**
- la función es no decreciente
- Si la **probabilidad es 1**, el suceso es **seguro**
- Si la **probabilidad es 0**, el suceso es **imposible.**

9.5 Algunas funciones de densidad de probabilidad.

Para nuestros objetivos, hay algunas ***funciones de densidad de probabilidad*** de gran valor y utilidad, dado que deberemos aplicarlas en el marco de determinadas pruebas estadísticas, especialmente adecuadas para la resolución de problemas pedagógicos mediante ciertos diseños.

9.5.1 Función de densidad de probabilidad normal.

La más frecuentemente utilizada por nosotros es la denominada normal, conocida como campana de Gauss. Ver fig. 9.2 pág. 189 para una representación de la curva.

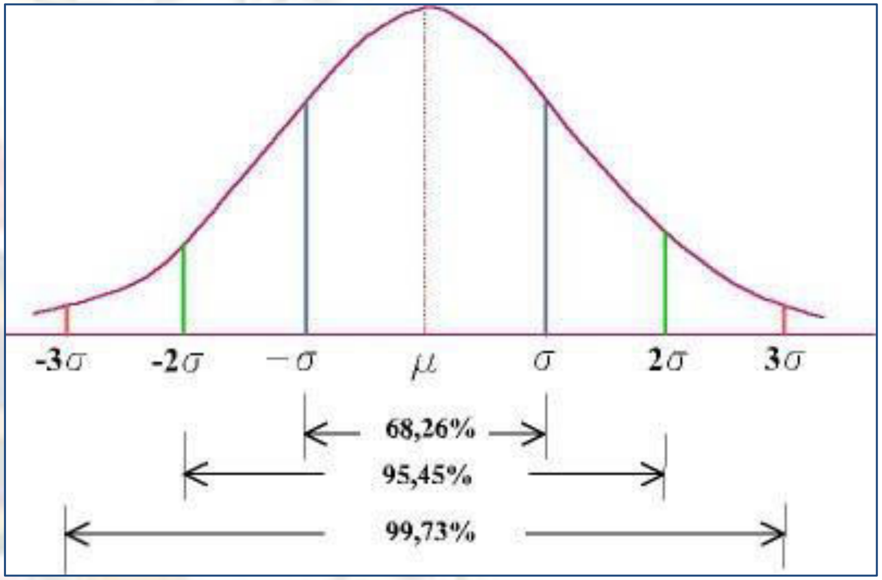
Algunas de sus características más importantes:

porcentaje de casos entre dos valores de σ (desviación típica poblacional):

±σ: 68%   ±2σ: 95% ±4,5σ: 99,99932%

estos valores en porcentajes se convierten en ***probabilidades*** *dividiendo por 100; es decir, el conjunto de los casos situados entre ±σ tiene una probabilidad de ocurrencia de 0,68*

mediante la **tabla de áreas de la curva normal, podemos atribuir probabilidades a un caso concreto, en sus diversas columnas.**



$$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

9.5.2 Función de densidad de probabilidad X² (Ji Cuadrado).

Las variables aleatorias a las que se les aplica se distribuyen según χ² con n-1 grados de libertad (v), esto es, el nº de casos menos 1, puesto que mientras los primeros casos pueden variar libremente, el último viene condicionado por todos los anteriores.

$$f(\chi^2) = \frac{(\chi^2)^{\left(\frac{\upsilon}{2}\right)-1} e^{\frac{-\chi^2}{2}}}{2^{\left(\frac{\upsilon}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{\upsilon}{2}\right)}, \quad \text{con } \chi^2 > 0$$

Según aumenta el nº de los grados de libertad, la distribución χ² se aproxima progresivamente a la distribución normal (ver fig. 9.3 pág. 190). De hecho, las tablas de χ² nos ofrecen valores de probabilidad hasta 30 gl. A partir de ahí, la distribución sigue con un valor de:

$$z = \sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2(gl)-1} \qquad \overline{X} = 0 \;\; y \;\; S = 1$$

La importancia de esta distribución radica en sus aplicaciones:

•como prueba de bondad de ajuste

•como prueba de independencia

•como prueba del grado de asociación entre dos conjuntos de variables de atributo, para calcular el coeficiente de contingencia C:

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{N+\chi^2}}$$

9.5.3 Función de densidad de probabilidad T (t de Student).

La distribución de probabilidad t se conoce como t de Student. Si tenemos Y y Z, dos variables aleatorias independientes, Y con una distribución χ^2 con n gl., y Z con una distribución normal (0,1), definimos la distribución

$$T = \frac{Z}{\sqrt{Y/\upsilon}}$$

Cuando aumentan los gl., la distribución se aproxima progresivamente a la campana de Gauss (ver fig. 9.4 pág. 191).

Esta distribución se utiliza frecuentemente en pruebas de contraste de hipótesis para decidir si la diferencia de medias es o no es estadísticamente significativa, a un determinado nivel de confianza.

Cuando las muestras son correlacionadas, la distribución t no sigue el estadístico de contraste aplicado en las muestras independientes. Dos muestras son correlacionadas cuando se forman parejas de sujetos, uno de cada muestra, que gozan de cierta característica común o similar.

9.5.4 Función de densidad de probabilidad F.

Denominada F de Fisher, esta función de probabilidad, junto con la anterior t, **son de las más utilizadas en el ámbito del contraste de hipótesis.**

$$F = t^2$$

F puede aplicarse además a contrastes con tres o más pares de medias en diseños de tres o más grupos. **Se aplica fundamentalmente en el análisis de varianza (ANAVA o An**alysis **of Va**riance **(ANOVA)).**

F nos indica si se dan o no diferencias estadísticamente significativas entre varios grupos de medias. En caso afirmativo, es preciso averiguar entre qué dos pares de medias se concreta tal diferencia, por lo que se hace necesario la continuación del trabajo con las denominadas **pruebas a posteriori.**

La distribución F se define como la razón entre dos distribuciones χ² independientes, dividida cada una de ellas entre sus respectivos gl.

$$F = \frac{\frac{\chi_1^2}{\upsilon_1}}{\frac{\chi_2^2}{\upsilon_2}}$$

Si las dos varianzas poblacionales son iguales, la fórmula se reduce a:

$$Si \rightarrow \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$F = \frac{\frac{\chi_1^2}{\upsilon_1}}{\frac{\chi_2^2}{\upsilon_2}} = \frac{\frac{(n_1-1)s_1^2}{\upsilon_1\sigma_1^2}}{\frac{(n_2-1)s_2^2}{\upsilon_2\sigma_2^2}} = \frac{\frac{s_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{s_2^2}{\sigma_2^2}} = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

Las tablas nos ofrecen los valores de probabilidad que corresponden a diversos gl del numerador (varianza **INTERgrupos en la ANAVA) y del denominador (varianza INTRAgrupos en la ANAVA).** La distribución F es no negativa, sesgada hacia la derecha y sus valores oscilan entre 0 e ∞, siendo asintótica al eje de abscisas.

9.6 La curva normal de probabilidades.

Es **uno de los modelos estadísticos más frecuentes** en nuestro ámbito de estudio.

Es importante decir que este modelo solo tiene sentido utilizarlo cuando el fenómeno al que lo apliquemos se conforme al mismo, es decir, cuando la realidad de que se trate tenga sus mismas características.

Cuando queremos conocer si los datos empíricos que tenemos se ajustan razonablemente al modelo tenemos un estadístico que nos ayudará a resolver esta cuestión y que se denomina **prueba de bondad de ajuste**. Sólo en el caso en que las discrepancias observadas son las esperables por puro azar consideraremos estos datos como ***normales*** y les aplicaremos todas las propiedades del modelo.

9.6.1 El modelo .

La **curva normal de probabilidades** o **campana de Gauss** es un **modelo matemático** cuyos datos se pueden obtener en las tablas de áreas de distribución normal.

Estas **tablas** nos ofrecen para **cada puntuación z tipificada**:

- el valor de la ordenada

-el área desde la media a tal valor z.

- el área de la parte mayor, en el caso que z corresponda a valores empíricos mayores que la media

-el área de la parte menor, en el caso de z correspondientes a valores empíricos menores que la media.

Características:

. **El valor máximo de la ordenada** corresponde a **la media del grupo** y, por tanto, a una **puntuación típica z=0**

. A ambos lados de la media (en el eje de abscisas z=0) se encuentran **dos puntos de inflexión**, que se corresponden con los **valores de z+-1,** esto es una desviación típica por encima y otra por debajo de la media

. **La curva es simétrica** respecto de la media, dado que **coinciden media, mediana y moda**; la ordenada de la media divide a la curva en dos partes iguales, cada una con un 50% de los casos.

. La curva es asintótica, esto es, por mucho que se acerque al eje de abscisas, nunca llegará a cortarlo, la curva tocará el eje de abscisas en el infinito. Esta es la razón por la que nunca trabajaremos con el 100% de los casos.

9.6.2 La prueba de bondad de ajuste .

En la investigación pedagógica acudimos con frecuencia a determinadas pruebas para contrastar hipótesis, entre cuyas exigencias se encuentre la de que sus datos se distribuyan "normalmente", esto es, de que se acomoden a la curva normal, o lo que es lo mismo, que la curva normal sea el modelo que mejor los representa.

Para decidir si una distribución empírica, esto es, tomada de la realidad, se acomoda al modelo, o si el modelo lo es de esa realidad de la que hemos obtenido tales datos empíricos, se acude a lo que se denominan **pruebas de bondad de ajuste**.

9.6.3 La prueba de Ji Cuadrado.

La prueba Ji Cuadrado valora las discrepancias entre las frecuencias empíricas y las teóricas según un determinado patrón o modelo. Si las discrepancias entre unas y otras no fueran estadísticamente significativas a un determinado nivel de confianza, admitiríamos que los datos empíricos y el modelo o patrón son una misma cosa; en otros términos: no podríamos rechazar la hipótesis de nulidad. Estaríamos admitiendo que las discrepancias encontradas pueden explicarse por puro azar como consecuencia de los errores de muestreo.

En ese apartado se aplica para decidir sobre el ajuste o no al modelo de la curva normal de probabilidades, pero debe quedar claro que esta prueba puede se aplicada para valorar la discrepancia entre valores empíricos y valores teóricos de muy diferente naturaleza.

9.6.3 La prueba de Ji Cuadrado.

Xi	fo	Lsup	Zi	P(Zi)	Pi	fe	(fo-fe)	(fo-fe)²	$\frac{(fo-fe)^2}{fe}$
	Σ					Σ			Σ

$$\chi^2 = \frac{\sum (f_o - f_e)^2}{f_e}$$

Xi → puntuaciones directas obtenidas por el alumno

fo → frecuencias observadas

Lsup → límite superior de cada intervalo

Zi → las puntuaciones típicas de tales límites.

(Necesitamos calcular previamente los valores de $\bar{X}$ y de S)

P(Zi) → probabilidades que corresponden a esas Zi (columna B en las tablas)

Pi → probabilidad de cada intervalo, que se calcula restando de su valor P(Zi), el valor que corresponde al intervalo anterior.

fe → frecuencias esperadas o teóricas. Para su cálculo:

* hallamos la columna P(Zi)
* hallamos la columna Pi
* hallamos la columna fe → Pi . N

Calculado el valor de χ^2 empíricamente, lo comprobamos con el valor de las tablas, para un nivel de confianza y (n-1) gl.

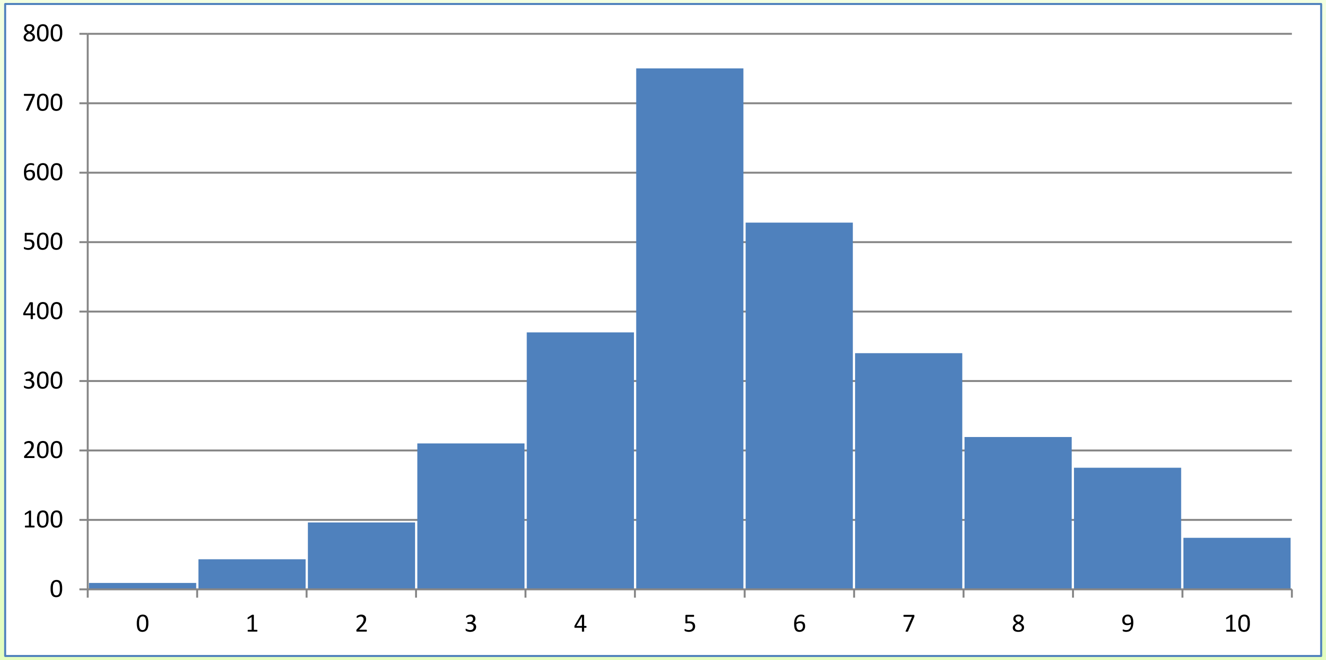
Si $\chi^2 \leq$ valor de tablas → **acepto Ho** → no hay diferencias significativas entre las distribuciones → **el ajuste es bueno**

Si $\chi^2 >$ valor de tablas → **acepto H1** → si hay diferencias significativas entre las distribuciones → **no hay ajuste**.

Ejemplo. Tabla 9.2

Xi	fo
10	74
9	175
8	219
7	340
6	528
5	750
4	370
3	210
2	96
1	43
0	9
	2814

Media, Xm	5,58
Des. Tip. S	1,943



Ver si los datos se ajustan a una Normal

Ejemplo. Tabla 9.2

Xi	fo	Lsup	zi=(Lsup-Xm)/S	p(zi)	pi	fe=N*pi	(fo-fe)	$(fo-fe)^2$	$(fo-fe)^2/fe$
					0,0057	16,04	-16,04	257,28	16,04
10	74	10,5	2,532	0,9943	0,0161	45,31	28,69	823,12	18,17
9	175	9,5	2,017	0,9782	0,0446	125,5	49,5	2450,25	19,52
8	219	8,5	1,503	0,9336	0,0952	267,89	-48,89	2390,23	8,92
7	340	7,5	0,988	0,8384	0,1565	440,39	-100,39	10078,2	22,88
6	528	6,5	0,473	0,6819	0,1983	558,02	-30,02	901,2	1,61
5	750	5,5	-0,041	0,4836	0,1945	547,32	202,68	41079,2	75,06
4	370	4,5	-0,556	0,2891	0,147	413,66	-43,66	1906,2	4,61
3	210	3,5	-1,071	0,1421	0,0856	240,88	-30,88	953,57	3,96
2	96	2,5	-1,585	0,0565	0,0386	108,62	-12,62	159,26	1,47
1	43	1,5	-2,1	0,0179	0,0134	37,71	5,29	27,98	0,74
0	9	0,5	-2,615	0,0045	0,0045	12,66	-3,66	13,4	1,06
	2814					**2814**			**174,04**

Media, Xm	5,58
Des. Tip. S	1,943

$$\chi^2 = \frac{\sum (f_o - f_e)^2}{f_e} \rightarrow \chi^2 = 174{,}04$$

$$\chi^2_{(11-1;99\%)} = 23{,}209$$

$$\chi^2_{(11-3;99\%)} = 20{,}090$$

Como χ² > valor de tablas → acepto H1
→ si hay diferencias significativas entre las distribuciones → **no hay ajuste**.

FÓRMULAS

CAPÍTULO 9

Prueba de Ji cuadrado (χ^2) de bondad de ajuste al modelo normal:

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_o - f_c)^2}{f_e}$$

Resumen

Modelo

Modelo Matemático

Modelo Estadístico

Determinista

Estocástico

Probabilidad a priori

Probabilidad a posteriori

Espacio Muestral

Independencia

Probabilidad condicionada

Función de Densidad

Función de Distribución

Normal

Ji-cuadrado

T de Student

F de Fisher

Análisis de la Varianza

Bondad de ajuste

Fe de erratas

CAPÍTULO 9

MODELOS ESTADÍSTICOS. PROBABILIDAD. CURVA NORMAL DE PROBABILIDADES. PRUEBAS DE BONDAD DE AJUSTE A LA CURVA NORMAL.

LAS ERRATAS SE MARCAN EN ROJO

Pág. 196.

$$\boxed{\chi^2 = \Sigma\, [\, (f_o - f_e)^2 / f_e\,]}$$

Este estadístico se distribuye según la distribución χ^2 para un valor igual al de filas menos 1 cuando μ y σ son conocidas, y con -3 en caso de ser estimadas. Vale la pena recordar aquí que χ^2 es un modelo estadístico.

Fe de erratas

Pág. 197. Cuadro 9.2

I	f_o	L_i	z_i	$p(z_i)$	p_i	f_e	$(f_o - f_e)$	$(f_o - f_e)^2$	$(f_o - f_e)^2 / f_e$
					0,0055	15,48	15,48	239,54	15,48
10	74	10,5	2,54	0.9945	0.0157	44,18	29,82	889,23	20,13
9	175	9,5	2,026	0.9788	0.0443	124,66	50,34	2534,12	20,33
8	219	8,5	1,51	0.9345	0.0956	269,02	50,02	2502,00	9,3
7	340	7,5	0,99	0.8389	0,1563	439,83	99,83	9966,03	22,66
6	528	6,5	0,475	0.6808	0.1968	553,79	25,79	665,12	1,2
5	750	5,5	-0,04	0.4840	0,1963	552,39	197,61	39049,71	70,69
4	370	4,5	-0,56	0.2877	0,1454	409,16	39,16	1533,51	3,75
3	210	3,5	-1,07	0.1423	0,0864	243,13	33,13	1097,6	4,51
2	96	2,5	-1,59	0.0559	0.0385	108,34	12,34	152,27	1,41
1	43	1,5	-2,11	0.0174	0,0132	37,14	5,86	34,34	0,92
0	9	0,5	-2,625	0.0043	0,0043	12,10	3,10	9,61	0,79
	N = 2814					2814			171,17

Fe de erratas

Pág. 198

$$\chi^2 = \Sigma\, [\, (f_o\ -\ f_e)^2 / f_e \,] = 171{,}17$$

Si nuestro valor empírico (171,17) fuera igual o mayor que el de las tablas para los g.l. correspondientes, rechazaríamos H_0 y afirmaríamos que nuestros datos empíricos no son compatibles con el modelo de la curva normal de probabilidades con una probabilidad de tomar una decisión errónea $\leq \alpha$. Pues bien, las tablas de ji cuadrado, para un nivel de confianza del 99 % (α = 0,01), y (11- 1) g.l. nos dan un valor de 23,209. Para 11 – 3 g.l.,el valor es de 20,090

PREGUNTAS

Exámenes anteriores

1

Ji cuadrado (X2) puede ser aplicada para valorar la discrepancia entre frecuencias. ..

Seleccione una:

- a. Empíricas
- b. Empíricas y teóricas
- c. Teóricas

2

Los modelos son representaciones de la realidad:

Seleccione una:

- a. Exactas
- b. Precisas
- c. Simplificadas

1

Ji cuadrado (X2) puede ser aplicada para valorar la discrepancia entre frecuencias. ..

Seleccione una:

- a. Empíricas
- b. Empíricas y teóricas ✓
- c. Teóricas

La respuesta correcta es: Empíricas y teóricas

2

Los modelos son representaciones de la realidad:

Seleccione una:

- a. Exactas
- b. Precisas
- c. Simplificadas ✓

La respuesta correcta es: Simplificadas

3

¿Cuáles de estos conceptos aparecen íntimamente ligados en Estadística?

Seleccione una:

- a. Aleatoriedad y probabilidad
- b. Probabilidad y homogeneidad
- c. Densidad y aleatoriedad

4

La probabilidad a priori

Seleccione una:

- a. Se calcula
- b. Se mide
- c. Se estima

3

¿Cuáles de estos conceptos aparecen íntimamente ligados en Estadística?

Seleccione una:

- a. Aleatoriedad y probabilidad ✓
- b. Probabilidad y homogeneidad
- c. Densidad y aleatoriedad

La respuesta correcta es: Aleatoriedad y probabilidad

4

La probabilidad a priori

Seleccione una:

- a. Se calcula
- b. Se mide
- c. Se estima ✓

La respuesta correcta es: Se estima