TEMA 4. ESTIMACIÓN PUNTUAL PARAMÉTRICA

1. PROPIEDADES DE LOS ESTIMADORES PUNTUALES

1. Estimador centrado (o insesgado):

$T(x_1, \dots, x_n)$

$T(\vec{x})$ es un estimador centrado de θ (o de $h(\theta)$) si

$$\boxed{E_\theta[T(\vec{x})] = h(\theta)}$$

- Sesgo de un estimador: $\boxed{b_\theta(T) = E_\theta[\,T(\vec{x}) - h(\theta)\,]}$

- Ejemplos:

$E[\bar{X}] = \mu$

$E[a_k] = \alpha_k$

$E[b_2] \neq \sigma^2 \longrightarrow$ Varianza no centrada

$E[S^2] = \sigma^2 \longrightarrow$ Cuasivarianza sí centrada

2. Estimador consistente:

Sea $T(\vec{x})$ un estimador de θ y sean $T_1(\vec{x}), \dots, T_n(\vec{x})$, una secuencia de estimadores que representan a T para diferentes tamaños muestrales. Diremos que $T(\vec{x})$ es consistente para θ si la sucesión $\{T_n\}$ converge en probabilidad a θ.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P_\theta\{\,|T_n - \theta| \leq \varepsilon\} = 1, \quad \forall \theta \in \Theta}$$

- Ejemplos:

$a_k \xrightarrow{c.s} \alpha_k \Rightarrow a_k \xrightarrow{P} \alpha_k \Rightarrow \{a_k\}$ consistente

$b_k \xrightarrow{c.s} \beta_k \Rightarrow b_k \xrightarrow{P} \beta_k \Rightarrow \{b_k\}$ consistente

- Proposición: (Condición de suficiencia para la consistencia)

Si $\{T_n\}$ es una sucesión de estimadores tal que $\forall \theta \in \Theta$:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} E_\theta[T_n(\vec{x})] = \theta \\ &\lim_{n\to\infty} V_\theta[T_n(\vec{x})] = 0 \end{aligned}\right\} \text{Entonces la sucesión es consistente}$$

- Demostración: (Usaremos Tchebychev)

$$P_\theta\{|T_n-\theta|>\varepsilon\} \le \frac{E_\theta[(T_n-\theta)^2]}{\varepsilon^2}$$

$$E_\theta[T_n^2+\theta^2-2\theta T_n] = \underbrace{E[T_n^2]} + \theta^2 - \underbrace{2\theta E[T_n] + (E_\theta[T_n])^2} - \underbrace{(E_\theta[T_n])^2} =$$

$$= \underbrace{V_\theta} + \underbrace{(E[T_n]-\theta)^2}$$

$$P_\theta\{|T_n-\theta|>\varepsilon\} \le \frac{V_\theta+(E_\theta[T_n]-\theta)^2}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\Longrightarrow$ T_n es consistente

- $X\sim \text{Bernoulli}(\theta)$, $x_1,\dots,x_n$, $T_n = \frac{1}{n+2}\left(\sum_{i=1}^n x_i + 1\right)$ ¿Es consistente?
  - $E[T_n] = \frac{1}{n+2}\left(\sum_{i=1}^n E[x_i]+1\right) = \frac{1}{n+2}\left(\sum_{i=1}^n \theta + 1\right) = \frac{n\theta+1}{n+2}$

    $\lim_{n\to\infty} E[T_n] = \theta$
  - $V[T_n] = \frac{1}{(n+2)^2}\left(\sum_{i=1}^n V[x_i]\right) = \frac{1}{(n+2)^2}\, n\theta(1-\theta)$

    $\lim_{n\to\infty} V[T_n] = 0$

  $\Longrightarrow$ T_n es consistente

2. CRITERIOS DE COMPARACIÓN DE ESTIMADORES

Error cuadrático medio del estimador T

$$ECM_T(\theta) = E_\theta[(T(x_1,\dots,x_n)-\theta)^2]$$

$$\boxed{ECM_T(\theta)} = E_\theta[T^2+\theta^2-2T\theta] = E_\theta[T^2]+\theta^2-2\theta E_\theta[T] - (E_\theta[T])^2 + (E_\theta[T])^2 =$$

$$= V_\theta(T) + (E_\theta[T]-\theta)^2 = \boxed{V_\theta(T) + b_\theta^2(T)}$$

- T, T' estimadores de θ:

  $ECM_T(\theta) \le ECM_{T'}(\theta) \quad \forall \theta\in\Theta$

  T mejor que T'

  T' inadmisible

  Restringimos el criterio de búsqueda:

  T, $b_\theta(T)=0$

  T minimiza la varianza ($V_\theta(T)$ mínimo)

  Es decir, entre los estimadores centrados, nos quedamos con el que tenga menor varianza

- Ejemplos:

1) $X \sim \text{Bernoulli}(\theta)$, $x_1, \dots, x_n$ m.a.s

$$E.C.M_T(\theta) = V_\theta(T) + b_\theta^2(T) = \frac{\theta(1-\theta)}{n} + 0 = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$$

$$T(x_1, \dots, x_n) = \bar{x}$$

$$h(\theta) = \theta$$

$$E_\theta[X] = \theta \ , \quad E[\bar{X}] = \theta$$

$$V[X] = \theta(1-\theta), \quad V[\bar{X}] = \frac{1}{n^2} n\theta(1-\theta) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$$

2) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $x_1, \dots, x_n$ m.a.s

- $T(x_1, \dots, x_n) = \bar{X}$, σ^2 conocido, $\theta = \mu$

$$E[\bar{X}] = \mu \Rightarrow b_\theta(T) = 0$$

$$V[\bar{X}] = \sigma^2/n$$

$$E.C.M_T(\theta) = V_\theta(T) = \sigma^2/n$$

- μ conocido, $\theta = \sigma^2$:

$$T(x_1, \dots, x_n) = S^2$$

$$E[S^2] = \sigma^2$$

$$V[S^2] = \frac{2\sigma^4}{(n-1)}$$

$$(n-1)\frac{\chi^2_{n-1}}{\sigma^2}$$

$$V(\chi^2_{n-1}) = 2(n-1)$$

$$E.C.M_{S^2}(\theta) = \frac{2\sigma^4}{(n-1)}$$

- $T(x_1, \dots, x_n) = b_2$

$$E[b_2] = \sigma^2\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$b_2 = \frac{S^2(n-1)}{n}$$

$$V[b_2] = V\left[\frac{S^2(n-1)}{n}\right] = \frac{(n-1)^{\cancel{2}}}{n^2} \cdot \frac{2\sigma^4}{(\cancel{n-1})} = \frac{2\sigma^4(n-1)}{n^2}$$

$$ECM_{b_2}(\sigma^2) = \frac{(2n-1)\sigma^4}{n^2} = V[b_2] + b_2^2 = \left(\frac{2\sigma^4(n-1)}{n^2}\right) + \left(\ \right)$$

$\Rightarrow$ Nos quedaríamos con b_2

- Teorema 2:

Si existe T, ECMV, para $h(\theta)$, T es único.

- Teorema de Rao-Blackwell:

$h(\theta)$
$T \in \mathcal{U}_h$
S suficiente

Entonces $H(S) = E[T|S]$:

1) $H(S) \in \mathcal{U}_h$
2) $V(H(S)) \leq V_\theta(T)$, $\forall \theta \in \Theta$

- Demostración:

1) $E[H(S)] = E[E[T|S]] = E[T] = h(\theta) \implies H(S)$ centrado

$$(H(S))^2 = (E[T|S])^2 = E[T^2|S] - \underset{0}{\underset{\vee|}{V[T|S]}} \leq E[\underset{\infty}{\underset{\wedge}{T^2}}|S]$$

$$E[(H(S))^2] < \infty$$

2) $V(H(S)) = V(E[T|S]) \leq V(T)$

- Teorema de Lehmann-Scheffé:

$h(\theta)$
Si existe $T \in \mathcal{U}_h$
S suficiente y completo

Entonces $H(S) = E[T|S]$:

$H(S)$ ECMV para $h(\theta)$

- Demostración:

S suficiente y completo, T centrado

1) Si sólo existe un estadístico centrado es el ECMV

2) T, T' ,, $E[T] = E[T'] = h(\theta)$

- S suficiente: $E[T|S]$ fun. de S; $E[T'|S]$ fun. de S

$$E[g(S)] = E[E[T|S]] - E[E[T'|S]] = E[T] - E[T'] = 0$$

- S completo: $g(S) \overset{c.s}{=} 0 \implies E[T|S] = E[T'|S]$

$T' \in \mathcal{U}_h$, S suficiente $\xrightarrow{\text{Rao-Blackwell}}$ $V(E[T'|S]) \leq V(T')$ $\forall \theta \in \Theta$

$$V(E[T'|S]) = V(E[T|S]) = V(H(S))$$

$\implies H(S)$ ECMV para $h(\theta)$

• Ejemplos:

1) $X \sim \text{Poisson}(\theta)$, $\theta > 0$

$x_1, \dots, x_n$

$h(\theta) = \theta$

$\Rightarrow$ Buscamos un estadístico suficiente:

$$P_\theta(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} e^{-n\theta}\, \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} = h(\vec{x})\, c(\theta)\, e^{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln\theta}$$

F. exponencial uniparamétrica

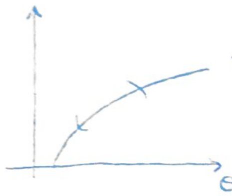
$S(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ suficiente

• Veamos si es completo:

$\theta \xrightarrow{Q} \mathbb{R}^1$

$\theta \longrightarrow \ln\theta = \eta$

$\theta > 0$



Contiene un abierto de $\mathbb{R}^1 \Rightarrow S = \sum_{i=1}^{n} x_i$ com

1) $E[S] = E[\sum_{i=1}^{n} x_i] = \sum_{i=1}^{n} E[x_i] = n\theta$

$h(\theta) = \theta$

$H(S) = \overline{X}$

$E[\overline{X}] = \theta \Rightarrow$ $\overline{X}$ ECMV para $h(\theta) = \theta$

2) $X \sim \text{Poisson}(\theta)$, $\theta > 0$

$x_1, \dots, x_n$

$h(\theta) = e^{-\theta}$

$S(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ suficiente y completo para θ

$H(S) = E[W|S]$

$W \in U_h$

$P_\theta(x) = \frac{1}{x!} e^{-\theta} \cdot \theta^{x}$

$$W = \begin{cases} 1 & x_1 = 0 \\ 0 & \text{En cualquier otro caso} \end{cases}$$

$E[W] = 1\, P_r(x_1 = 0) + \cancel{0 \cdot P_r(\text{otro caso})} = e^{-\theta}$

$H(S) = E[W|S] = E[W \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = t] = 1 \cdot P_r(W = 1 \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = t) + \cancel{0 \cdot P_r(W}$

$= P_r(x_1 = 0 \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = t) = \dfrac{P_r(x_1 = 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = t)}{P_r(\sum_{i=1}^{n} x_i = t)} = \dfrac{P_r(x_1 = 0, \sum_{i=2}^{n} x_i =}{P_r(\sum_{i=1}^{n} x_i = t)}$

$$= \frac{Pr(X_1=0)\, Pr(\sum_{i=2}^{n} X_i = t)}{Pr(\sum_{i=1}^{n} X_i = t)} = \frac{(e^{-\theta}) \frac{1}{t!} e^{-(n-1)\theta}((n-1)\theta)^t}{\frac{1}{t!} e^{-n\theta}(n\theta)^t} = e^{-\theta} e^{\theta} \frac{(n-1)^t}{n^t} \overset{(*)}{=}$$

$Pr(X_1=0) = e^{-\theta}$

$Pr(\sum_{i=2}^{n} X_i = t) \sim \text{Poisson}((n-1)\theta)$

$Pr(\sum_{i=1}^{n} X_i = t) \sim \text{Poisson}(n\theta)$

$$\overset{(*)}{=} \left(\frac{n-1}{n}\right)^t = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^{n} X_i} = H(S)$$

$\Longrightarrow$ $\underline{\underline{H(S) \text{ ECMV}}}$ para $h(\theta) = e^{-\theta}$

- Otra manera:

  $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ suficiente y completo

  $E[H(S)] = h(\theta) = e^{-\theta}$

  $H(S)$ ECMV para $h(\theta)$

  Lehmann Scheffé

  $$e^{-\theta} = E[H(S)] = \sum_{s=0}^{\infty} H(s) \frac{e^{-n\theta}(n\theta)^t}{t!}$$

  $$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Poisson}(n\theta)$$

  $$e^{-\theta+n\theta} = \sum_{s=0}^{\infty} H(s) \frac{(n\theta)^t}{t!}$$

  $$e^{\theta(n-1)} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{((n-1)\theta)^t}{t!}$$

  $$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{((n-1)\theta)^t}{\cancel{t!}} = \sum_{s=0}^{\infty} H(s) \frac{(n\theta)^t}{\cancel{t!}}$$

  $$H(s) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^t$$

Condiciones de regularidad de Fréchet-Cramer-Rao

- **R1:** El conjunto soporte de la distribución f_θ,

$$S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X} : f_\theta(x_1, \dots, x_n) > 0\}$$

no depende de θ y que exista $\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta}(x_1, \dots, x_n)$

- **R2:** Sea $h(\theta)$ función paramétrica de interés. $\forall T \in \mathcal{U}_h$ debe cumplirse:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \theta} \displaystyle\int f_\theta(\vec{x})\, d\vec{x} = \int \dfrac{\partial}{\partial \theta} f_\theta(\vec{x})\, d\vec{x} & \text{en el caso continuo} \\ \dfrac{\partial}{\partial \theta} \displaystyle\sum_x f_\theta(\vec{x}) = \sum_x \dfrac{\partial}{\partial \theta} f_\theta(\vec{x}) & \text{en el caso discreto} \end{cases}$$

La condición de regularidad R2 es equivalente a:

$$\boxed{E_\theta\left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln(f_\theta(\vec{x}))\right] = 0, \quad \forall \theta \in \Theta}$$

- Información de Fisher:

$$\boxed{I_n(\theta) = E_\theta\left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln(f_\theta(\vec{x}))\right)^2\right]}$$

- **Teorema de la cota de FCR:**

Si se verifican las condiciones de regularidad R1 y R2 y sea $T \in \mathcal{U}_h$ tal que

$$\begin{cases} h'(\theta) = \dfrac{\partial E_\theta[T]}{\partial \theta} = \dfrac{\partial}{\partial \theta} \displaystyle\int_{\mathcal{X}} T(\vec{x}) f_\theta(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_{\mathcal{X}} T(\vec{x}) \dfrac{\partial}{\partial \theta} f_\theta(\vec{x})\, d\vec{x} \\ I_n(\theta) = E_\theta\left[\left(\dfrac{\partial}{\partial \theta} \ln(f_\theta(\vec{x}))\right)^2\right] \text{ que verifica } 0 < I_n(\theta) < \infty \end{cases}$$

Entonces

$$\frac{(h'(\theta))^2}{I_n(\theta)} \leq V_\theta[T], \quad \forall \theta \in \Theta$$

[illegible] aquí

Además, COTA INFERIOR PARA LA VARIANZA DE TODOS LOS ESTIMADORES CENTRADOS DE $h(\theta)$: (Si uno de los estimadores centrados alcanza esta cota, es el ECMV para $h(\theta)$)

$$\boxed{\frac{(h'(\theta))^2}{I_n(\theta)} = V_\theta[T], \forall \theta \in \Theta \iff \exists\, k(\theta) \text{ tal que } \frac{\partial}{\partial \theta} \ln(f_\theta(\vec{x})) = k(\theta)[T(\vec{x}) - h(\theta)] \quad \forall \theta \in \Theta}$$

- COTA: $\boxed{\dfrac{h'(\theta)}{k(\theta)}}$

Pedir eficiencia a Carlos (Post-it)

- Cálculo de la información de Fisher:

1) $\boxed{I_n(\theta) = n I_1(\theta)}$

2) Si se verifica la condición de regularidad de Fisher:

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\int_X f_\theta(\vec{x})\,d\vec{x} = \int \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} f_\theta(\vec{x})\,dx}$$

$$\boxed{I_n(\theta) = -E_\theta\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(\ln f_\theta(\vec{x}))\right]}$$

- <u>Observaciones importantes</u>:

1) Si se verifican las condiciones de regularidad R1 y R2 y la adicional, entonces, si $\exists\, T \in U_h$ cuya varianza alcance la cota de FCR, debe poder factorizarse

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f_\theta(\vec{x}) = \frac{n I_1(\theta)}{h'(\theta)}\left[T(\vec{x}) - h(\theta)\right]}$$

$$\boxed{k(\theta) = \frac{n I_1(\theta)}{h'(\theta)}}$$

si nos dan una exponencial está todo hecho

2) La expresión anterior permite construir el estimador T, la función $h(\theta)$ y el valor de la cota de FCR a menos de constantes aditivas y multiplicativas.

<u>Familia exponencial uniparamétrica</u>

Si la familia de distribuciones de probabilidad verifica las condiciones de regularidad R1 y R2 y la cota es alcanzable, entonces la familia es exponencial uniparamétrica

$$\boxed{f_\theta(\vec{x}) = c(\theta)\,h(\vec{x})\,e^{\pi(\theta)T(\vec{x})}}$$

T es el estadístico que alcanza la cota.

Recíprocamente, si la muestra se distribuye según la función de densidad anterior, con $\pi'(\theta)$ no nula, entonces T alcanza la cota de FCR

$$\boxed{h(\theta) = \frac{-c'(\theta)}{c(\theta)\pi'(\theta)}}, \quad k(\theta) = \pi'(\theta)$$

- COTA FCR: $\boxed{\dfrac{h'(\theta)}{\pi'(\theta)}}$

• Ejemplos:

1) m.a.s tamaño n Bernoulli(θ)

¿Cota FCR para $h(\theta)=\theta$?

$P_\theta(x) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}, \quad \theta\in(0,1)$

$P_\theta(\vec{x}) = \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} = (1-\theta)^n e^{(\sum_{i=1}^n x_i)\ln\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)}$

Familia exponencial uniparamétrica

$c(\theta) = (1-\theta)^n$

$T(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n x_i$

$\pi(\theta) = \ln\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)$

$c'(\theta) = -n(1-\theta)^{n-1}$

$\pi'(\theta) = \dfrac{(\theta/1-\theta)'}{\theta/1-\theta} = \dfrac{\frac{1(1-\theta)+\theta}{(1-\theta)^2}}{\frac{\theta}{1-\theta}} = \dfrac{(1\cancel{-\theta})}{\theta(1-\theta)^{\cancel{2}}} = \dfrac{1}{\theta(1-\theta)}$

$h(\theta) = \dfrac{-c'(\theta)}{c(\theta)\pi'(\theta)}$

$h(\theta) = \dfrac{n(1-\theta)^{n-1}}{(1-\theta)^n\frac{1}{\theta(1-\theta)}} = \dfrac{n\cancel{(1-\theta)^{n-1}}\theta\cancel{(1-\theta)}}{\cancel{(1-\theta)^n}} = n\theta$

Cota: $\dfrac{h'(\theta)}{\pi'(\theta)} = n\theta(1-\theta)$ //

$\bar{X}$ alcanza la cota para $h(\theta)=\theta$

$\sum x_i$ alcanza la cota para $h(\theta) = n\theta$

• R_1, R_2: (otra manera)

$\ln P_\theta(\vec{x}) = (\sum_{i=1}^n x_i)\ln\theta + n\ln(1-\theta) - (\sum_{i=1}^n x_i)\ln(1-\theta)$

$\dfrac{\partial}{\partial\theta}\ln P_\theta(\vec{x}) = \dfrac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta} + n\left(\dfrac{-1}{1-\theta}\right) - (\sum_{i=1}^n x_i)\left(\dfrac{-1}{1-\theta}\right) = \dfrac{n\bar{x}}{\theta} - \dfrac{n}{1-\theta} + \dfrac{n\bar{x}}{1-\theta} =$

$= n\bar{x}\left(\dfrac{1}{\theta}+\dfrac{1}{1-\theta}\right) - \dfrac{n}{1-\theta} = n\bar{x}\left(\dfrac{1-\theta+\theta}{\theta(1-\theta)}\right) - \dfrac{n}{1-\theta} = \dfrac{n\bar{x}}{\theta(1-\theta)} - \dfrac{n}{1-\theta} =$

$= \left(\dfrac{n}{\theta(1-\theta)}\right)[\bar{x}-\theta]$

$k(\theta)\,[T(\vec{x}) - h(\theta)]$

Cota: $\dfrac{h'(\theta)}{k(\theta)} = \dfrac{1}{\frac{n}{\theta(1-\theta)}} = n\theta(1-\theta)$ //

• Otra manera: (Aplicando teorema de FCR)

Cota: $\dfrac{(h'(\theta))^2}{I_n(\theta)}$

$h(\theta) = \theta$
$h'(\theta) = 1$

$I_n(\theta) = n I_1(\theta)$

$I_1(\theta) = -E_\theta\left[\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f_\theta(x)\right]$

$$P_\theta(x) = \theta^x (1-\theta)^{1-x}$$

$$\ln P_\theta(x) = x \ln\theta + (1-x)\ln(1-\theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln P_\theta(x) = \frac{x}{\theta} + (-1+x)\left(\frac{1}{1-\theta}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln P_\theta(x) = \frac{-x}{\theta^2} + (x-1)\left(\frac{1}{(1-\theta)^2}\right)$$

$$I_1(\theta) = -E_\theta\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln P_\theta(x)\right] = \frac{1}{\theta^2}E[x] - \frac{1}{(1-\theta)^2}E[x-1] = \frac{1}{\theta^{\cancel{2}}}\cancel{\theta} - \frac{1}{(1-\theta)^{\cancel{2}}}(\cancel{\theta-1}) =$$

$$= \frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-\theta} = \frac{1}{\theta(1-\theta)}$$

$$\Rightarrow \text{Cota: } \frac{(h'(\theta))^2}{n I_1(\theta)} = \frac{1}{\frac{n}{\theta(1-\theta)}} = n\theta(1-\theta)$$

2) $X_1, \dots, X_n$ m.a.s tamaño n de una población $X \sim \text{Uniforme}(0, 2\theta)$

Queremos estimar $h(\theta) = \theta$

(No cumple las condiciones de regularidad, luego no tiene sentido calcular la cota)

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2\theta}, \quad x \in (0, 2\theta)$$

$$f_\theta(\vec{x}) = \left(\frac{1}{2\theta}\right)^n \prod_{i=1}^n I_{(0,2\theta)}(x_i) = \frac{1}{(2\theta)^n} I_{\left(\frac{1}{2}X_{(n)}, \infty\right)}(\theta)$$

$\Rightarrow X_{(n)}$ estadístico suficiente

$x_i \geq 0$

$X_{(n)} \leq 2\theta \Rightarrow X_{(n)} \in (-\infty, 2\theta)$

$2\theta \geq X_{(n)}$

$\theta \geq \frac{1}{2} X_{(n)} \longrightarrow \theta \in \left(\frac{1}{2}X_{(n)}, \infty\right)$

Veamos que $X_{(n)}$ es también completo y, por el teorema de Basu sabemos que suficiente y completo $\Rightarrow$ minimal suficiente

$$E[X_{(n)}] = \int_0^{2\theta} y\, n\left(\frac{y}{2\theta}\right)^{n-1} dy$$

$$F_{X_{(n)}}(y) = (F(y))^n = \left(\frac{y}{2\theta}\right)^n$$

$$f(y) = \frac{1}{2\theta}, \quad F(y) = \int_0^y \frac{1}{2\theta}\, dy$$

$$f_{X_{(n)}}(y) = n\left(\frac{y}{2\theta}\right)^{n-1}$$

$$E[X_{(n)}] = \underbrace{\frac{n}{n+1}2\theta}_{h(\theta)} \qquad T_1(X_1, \dots, X_n) = \frac{n+1}{2n} X_{(n)}$$

Por L-S: ECMV único $\quad H(T)$, T suficiente y completo

$$E[T(X_1, \dots, X_n)] = \theta$$

$T_2(x_1,\dots,x_n) = \overline{X}$, $V(\overline{X}) = \dots$

$$V\left(\frac{n+1}{2n} X_{(n)}\right) = \frac{(n+1)^2}{(2n)^2} \quad E[X_{(n)}^2] - (E[X_n])^2$$

Tendremos que ver cuál es el de menor varianza.

3) $X_1,\dots,X_n$, Exponencial (θ), $\theta > 0$

$$f_\theta(x) = \theta e^{-\theta x}$$

$$f_\theta(\vec{x}) = \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i} = \theta^n e^{-n\theta \overline{x}}$$

$c(\theta) = \theta^n$

$\Pi(\theta) = -n\theta$ — Familia exponencial uniparamétrica

$T(\vec{x}) = \overline{x}$

$c'(\theta) = n\theta^{n-1}$

$\Pi'(\theta) = -n$

$T(x_1,\dots,x_n)$ es el estadístico que alcanza la cota para

$$h(\theta) = \frac{-c'(\theta)}{c(\theta)\Pi'(\theta)} = \frac{-n\theta^{n-1}}{\theta^n(-n)} = \frac{1}{\theta}$$

$$\text{Cota}: \frac{h'(\theta)}{\Pi'(\theta)} = \frac{-\frac{1}{\theta^2}}{-n} = \frac{1}{n\theta^2} \quad //$$

- Otra manera:

$$\ln f_\theta(\vec{x}) = n\ln\theta - n\overline{x}\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f_\theta(\vec{x}) = \frac{n}{\theta} - n\overline{x} = \underset{K(\theta)}{-n}\left[\overline{x} - \frac{1}{\theta}\right]$$

$$\text{Cota}: \frac{h'(\theta)}{K(\theta)} = \frac{-\frac{1}{\theta^2}}{-n} = \frac{1}{n\theta^2} \quad //$$

- Estimar $h(\theta) = \theta$:

$\overline{X}$ es suficiente

Además, $\overline{X}$ es completo: $\theta \xrightarrow{\Pi} \mathbb{R}^1$

$\theta \longrightarrow -n\theta$

$\theta \geq 0$

Podemos coger un intervalo

$E[\overline{X}] = \frac{1}{\theta}$

$E[H(\overline{x})] = \theta$

$T = \sum X_i \sim \text{Gamma}(\theta, n)$

$$\theta = E_\theta[H(T)] = \int_0^\infty H(T) \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} e^{-\theta t} t^{n-1}\,dt$$

$$\frac{(n-1)\Gamma(n-1)}{\theta^{n-1}} = \frac{\theta\,\Gamma(n)}{\theta^n} = \int_0^\infty H(T) e^{-\theta t} t^{n-1}\,dt$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\theta t} t^{n-2}\, dt = \frac{\Gamma(n-1)}{\theta^{n-1}} \quad \text{(lo sabemos por la función gamma)}$$

$$(n-1)\int_0^{\infty} e^{-\theta t} \underbrace{t^{-1} t^{n-1}}_{t^{n-2}}\, dt = \int_0^{\infty} H(T) e^{-\theta t} t^{n-1}\, dt$$

$$H(T) = t^{-1}(n-1) = \frac{n-1}{t}$$

$$\Longrightarrow \boxed{H(T) = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}} \quad \text{ECMV para } h(\theta) = \theta$$

- Si nos piden calcular la cota:

$$\text{Cota: } \frac{(h'(\theta))^2}{I_n(\theta)}$$

- Cota: $\frac{\theta^2}{n}$

$$I_n(\theta) = n I_1(\theta)$$

$$I_1(\theta) = -E_\theta\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f(x)\right]$$

- NOTA:
- Sabemos que $\bar{X}, \sum X_i$ alcanza la cota para $h(\theta) = \frac{1}{\theta}$, y si este la alcanza no puede haber otro que alcance la cota para otra $h(\theta)$, salvo constantes multiplicativas, luego $V(\sum X_i)$ no puede alcanzar la cota para $h(\theta) = \theta$.

Calculemos $V\left(\frac{n-1}{\sum X_i}\right)$:

$$X_i \sim Exp(\theta) = \text{gamma}(\theta, 1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{gamma}(\theta, n)$$

$$Y = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

$$t \xrightarrow{g} \frac{n-1}{t} = Y$$

$$t = \frac{n-1}{Y} \xleftarrow{g^{-1}} Y$$

$$\left|\frac{\partial t}{\partial y}\right| = \left|\frac{n-1}{Y^2}\right|$$

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{n-1}{y}\right)\left(\frac{n-1}{y^2}\right) = \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} e^{-\theta\frac{n-1}{y}} (n-1)^n y^{-(n+1)}$$

$$E_\theta[Y] = \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} (n-1)^n \int_0^{\infty} e^{-\theta\frac{n-1}{y}} y^{n}\, dy = \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} (n-1)^n \int_0^{\infty} e^{-\theta(n-1)x} x^{n-2}\, dx \overset{*}{=}$$

$$x = \frac{1}{y} \to dx = -\frac{1}{y^2} dy$$

$$y = \frac{1}{x} \to dy = -y^2 dx = -\frac{1}{x^2} dx$$

$$y = 0 \to x = \infty$$

$$y = \infty \to x = 0$$

$$a = \theta(n-1)$$

$$p - 1 = n-2 \Rightarrow p = n-1$$

$$\frac{\Gamma(p)}{a^p} = \frac{\Gamma(n-1)}{(\theta(n-1))^p}$$

$$\overset{*}{=} \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} (n-1)^n \frac{\Gamma(n-1)}{(n-1)^{n-1}\theta^{n-1}} = \frac{\Gamma(\cancel{n-1})(\cancel{n-1})}{(n-1)\Gamma(\cancel{n-1})\,\theta^{-1}} = \theta$$

$$E[Y^2] = \frac{\theta^n}{\Gamma(n)}(n-1)^n \underbrace{\int_0^\infty e^{-\theta(n-1)x} x^{n-3}\, dx}_{\substack{a=\theta(n-1) \\ p-1=n-3 \Rightarrow p=n-2 \\ \frac{\Gamma(n-2)}{(\theta(n-1))^{n-2}}}} = \frac{\theta^2(n-1)}{n-2}$$

$$V(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{\theta^2}{n-2}$$

- Cota: $\dfrac{(h'(\theta))^2}{I_n(\theta)} = \dfrac{\theta^2}{n}$

MÉTODOS DE OBTENCIÓN DE ESTIMADORES

1. M Momentos

$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$

$\alpha_k = E[X^k] = \alpha_k(\theta_1, \dots, \theta_r)$

$\alpha_k(\theta_1, \dots, \theta_r) = a_k, \quad k = 1, \dots, r$

$\hat{\theta}_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \hat{\theta}_r(x_1, \dots, x_n)$

- Ejemplos:

1) $X \sim N(\mu, \sigma^2), \quad \theta = (\mu, \sigma^2)$
$X_1, \dots, X_n \qquad r = 2$

$\alpha_1 = E[X] = \mu = a_1 = \bar{X}$

$\alpha_2 = E[X^2] = V(X) + (E[X])^2 = \sigma^2 + \mu^2$

$$\begin{cases} \mu = \alpha_1 \\ \sigma^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 \end{cases}$$

$(\alpha_1, \alpha_2) \xrightarrow{g} (\alpha_1, \alpha_2 - \alpha_1^2)$
$(a_1, a_2) \longrightarrow (a_1, a_2 - a_1^2)$

$T_1 = a_1 = \bar{X}, \quad T_2 = a_2 - a_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{X}^2$

2) $X \sim B(n, \theta) \quad n \in \mathbb{N}, \quad \vec{\theta} = (n, \theta)$
$X_1, \dots, X_n \qquad r = 2$

$\alpha_1 = E[X] = n\theta$

$\alpha_2 = E[X^2] = V(X) + (E[X])^2 = n\theta(1-\theta) + n^2\theta^2$

$n = \alpha_1/\theta$

$\alpha_2 = \alpha_1/\theta \; \theta(1-\theta)^2 + n^2\theta^2 \Rightarrow \theta = \dfrac{\alpha_1^2 + \alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1}$ //

$$(\alpha_1, \alpha_2) \xrightarrow{g} \left(\frac{\alpha_1^2}{\alpha_1^2+\alpha_1-\alpha_2}, \frac{\alpha_1^2+\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1} \right)$$

$$(a_1, a_2) \longrightarrow \underset{\hat{\theta}(x)}{T(\vec{x})} = \left(\frac{a_1^2}{a_1^2+a_1-a_2}, \frac{a_1^2+a_1-a_2}{a_1} \right)$$

3) X, $P(X=x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-\theta) & x=-1 \\ \frac{1}{2} & x=0 \\ \frac{1}{2}\theta & x=1 \end{cases}$

¿Estimador de θ M.M? ¿Estimador centrado? ¿Estimador consistente?

$r=1$

- $\alpha_1 = E[X] = \sum x_i P(X=x_i) = -1 \cdot \frac{1}{2}(1-\theta) + 0 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\theta = -\frac{1}{2} + \theta \Rightarrow \theta = \alpha_1 + \frac{1}{2}$ //

$$\alpha_1 \xrightarrow{g} \left(\alpha_1 + \tfrac{1}{2}\right)$$

$$a_1 \longrightarrow a_1 + \tfrac{1}{2} = \bar{X} + \tfrac{1}{2}$$

- $E[\bar{X}+\frac{1}{2}] = E[\bar{X}] + \frac{1}{2} = \frac{1}{n} n E[X_i] + \frac{1}{2} = \theta - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \theta$ // (Centrado)

- $\lim_{n\to\infty} E[T] = h(\theta)$

$\lim_{n\to\infty} V[\;] = 0$

$V(\bar{X}+\frac{1}{2}) = V(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} n V(X_i) = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{2} - \theta^2 + \theta\right] \longrightarrow 0$ // (Consistente)

$E[X_i^2] = \frac{1}{2}(1-\theta) + 0 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}$

$V(X_i) = E[X_i^2] - (E[X_i])^2 = \frac{1}{2} - \theta^2 + \theta$

- Propiedades de los estimadores obtenidos por MM:
  (1) Son centrados
  (2) Son consistentes : $\{a_k\} \xrightarrow{P} \alpha_k$ LDGN
  (3) T.C.L : Normalidad asintótica:

$$a_k \longrightarrow N\left(\alpha_k, \frac{V[X^k]}{n}\right)$$

2. Método de máxima similitud (EMV)

$f(\vec{x}|\theta) = f_\theta(\vec{x}) = f_\theta(x_1,\dots,x_n) = L(\theta|\vec{x}) = L_{\vec{x}}(\theta)$ función de verosimilitud

El método de máxima similitud consiste en elegir como estimador del parámetro θ (desconocido) aquel valor $T(x_1,\dots,x_n)$ $\hat{\theta}(x_1,\dots,x_n)$ que hace máxima la función de verosimilitud:

$$\hat{\theta}(x_1,\dots,x_n) \;\; L(\hat{\theta}|\vec{x}) = \max_{\theta\in\Theta} L(\theta|x_1,\dots,x_n)$$

$$\max_{\theta\in\Theta} \ln L(\theta|x_1,\dots,x_n)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln(L(\theta|x_1,\dots,x_n)) \longrightarrow \hat{\theta}(x_1,\dots,x_n)$$

- Ejemplos:

1) $X \sim N(\theta,1)$
$X_1,\dots,X_n$ m.a.s
EMV?

- $f_\theta(\vec{x}) = L_{\vec{x}}(\theta) = \dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}$

- $\ln L_{\vec{x}}(\theta) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2$

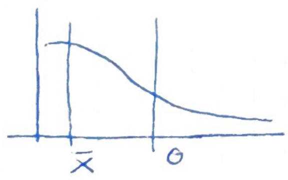
- $\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L_{\vec{x}}(\theta) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(2(x_i-\theta)) = n\bar{x} - n\theta = 0$
$\Downarrow$
$\bar{x} = \theta$ $\quad T(x_1,\dots,x_n)$ $\theta(x_1,\dots,x_n)$

- $\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln L_{\vec{x}}(\theta) = -n < 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \bar{X}$
Máximo relativo

Estudiamos la frontera para ver si es absoluto:

$\lim_{\theta\to\pm\infty} L_{\vec{x}}(\theta) = 0$

$x_i \in \mathbb{R}$
$\hat{\theta} = \bar{X}$ es un máximo global $\Longrightarrow$ $\boxed{\bar{X} \text{ es EMV}}$

2) 

$\bar{X} \geq 0$
$\bar{x} \leq 0$, 0 es EMV

3) $X \sim B(1,\theta)$
$x_1, \dots, x_n$
EMV?

$$f_\theta(\vec{x}) = L_{\vec{x}}(\theta) = \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}$$

$$\ln L_{\vec{x}}(\theta) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \ln \theta + \left(n - \sum_{i=1}^n x_i\right) \ln(1-\theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L_{\vec{x}}(\theta) = \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)}{\theta} - \frac{\left(n - \sum_{i=1}^n x_i\right)}{1-\theta} = 0 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{1-\theta} - \frac{n}{1-\theta} = 0$$

De modo que

$$0 = \frac{n\bar{x}}{\theta} + \frac{n\bar{x}}{1-\theta} - \frac{n}{1-\theta} = \frac{n\bar{x} - n\bar{x}\theta + n\bar{x}\theta - n\theta}{\theta(1-\theta)} = \frac{n(\bar{x}-\theta)}{\theta(1-\theta)}$$

$$\boxed{\bar{x} = \hat{\theta}}$$

Falta ver que es máximo absoluto:

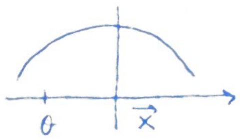
$\theta \in [0,1]$

$L_{\vec{x}}(\theta = 0) = 0 \in [0,1]$

$L_{\vec{x}}(\theta = 1) = 0 \in [0,1]$

$\boxed{\bar{x} \text{ es EMV para } \theta}$

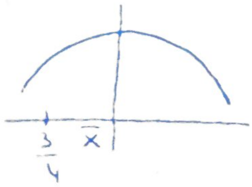
- $\theta \in (0,1)$



$\bar{x} > \theta$ creciente
$\bar{x} < \theta$ decreciente

Si $\bar{x} = 0$ $\nexists$ EMV

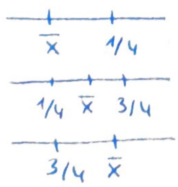
- $\theta \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$



$\bar{x} < \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4} \leq \bar{x} \leq \frac{3}{4}$

$\bar{x} \geq \frac{3}{4}$



4) $X \sim U(0,\theta)$, $\theta \geq 0$
$x_1, \dots, x_n$

$$L_{\vec{x}}(\theta) = \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^n I_{[0,\theta]}(x_i)$$

$$\ln L_{\vec{x}}(\theta) = -n \ln \theta$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L_{\vec{x}}(\theta) = -\frac{n}{\theta} = 0 \Rightarrow -n = 0 \text{ ¡!}$$

Como es la uniforme reescribimos

$$L_{\vec{x}}(\theta) = \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^n I_{[0,\theta)}(x_i) = \frac{1}{\theta^n} I_{[x_{(n)}, \infty)}(\theta)$$

Como el máximo depende de θ y $\theta \in (x_{(n)}, \infty)$, el máximo estará

5) $X \sim U\left(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}\right)$

$x_1, \dots, x_n$

EMV?

$$L_{\vec{x}}(\theta) = \prod_{i=1}^{n} I_{\left(\theta-\frac{1}{2}, \theta+\frac{1}{2}\right)}(\vec{x}_i) = I_{\left[x_{(n)}-\frac{1}{2}, x_{(1)}+\frac{1}{2}\right]}(\theta)$$

$\theta - \frac{1}{2} \quad x_{(1)} \quad x_{(n)} \quad \theta + \frac{1}{2}$

El EMV es cualquier punto del intervalo $\left[x_{(n)} - \frac{1}{2}, x_{(1)} + \frac{1}{2}\right]$

$\rightarrow \theta - \frac{1}{2} \leq x_{(1)}$

$\theta \leq x_{(1)} + \frac{1}{2}$

$\theta \in \left(-\infty, x_{(1)} + \frac{1}{2}\right]$

$\rightarrow x_{(n)} \leq \theta + \frac{1}{2}$

$x_{(n)} - \frac{1}{2} \leq \theta$

$\theta \in \left[x_{(n)} - \frac{1}{2}, \infty\right)$

6) Tenemos 4 bolas y sacamos 2 bolas con reemplazamiento, sabiendo que mínimo hay 1B y 1N.

X_1	X_2
B	B
B	N_1
B	N_2
B	N_3
N_1	B
N_1	N_1
...	...

B N_1 N_2 N_3

$\theta = \frac{1}{4}$	P
$x=0$ (2 negras)	$\frac{9}{16}$
$x=1$ (B | N)	$6/16$
$x=2$ (2 blancas)	$1/16$

• Hagámoslo ahora con 2 blancas y 2 negras:

$x \backslash \theta$	$\theta = 1/4$	$\theta = 1/2$	$\theta = 3/4$
$x=0$	$9/16$	$4/16$	$1/16$
$x=1$	$6/16$	$8/16$	$6/16$
$x=2$	$1/16$	$4/16$	$9/16$
	1B y 3N		3B y 1N

- Propiedades de los EMV:

1) Suficiencia:

Si $\hat{\theta}$ es un estimador suficiente y el EMV existe y es único, es función del estimador suficiente.

- Demostración:

$$\hat{\theta} = T(X_1, \dots, X_n) \underset{\text{T}^{\text{a}}\text{ fact.}}{\Longrightarrow} f_\theta(\vec{x}) = h(x)\, g_\theta(\hat{\theta})$$

El EMV existe y es único, maximiza

$g_\theta(\hat{\theta}) \Longrightarrow$ será función de $\hat{\theta}$

2) Consistentes: (En condiciones bastante generales)

Es decir, que el dominio no esté afectado por el parámetro, que se cumplan R_1 y R_2...

3) Centralidad:

No son centrados, pero sí son asintóticamente centrados.

$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$ L.D.G.N

$\theta_n \longrightarrow E[\hat{\theta}]$

4) Eficiencia: (Cond. regularidad)

El estimador eficiente, si existe, es el EMV.

5) Invarianza:

Los estimadores son invariantes frente a transformaciones

$\hat{\theta}$ EMV para θ

g función de inversa única $\Rightarrow g(\hat{\theta})$ es EMV para $g(\theta)$

ESTADÍSTICA BAYESIANA

En la estadística bayesiana θ es una v.a (tiene una distribución y será con la que trabajemos).

• Ejemplo: Lanzar una moneda al aire

P(cara) éxito   Bernoulli(θ)
P(cruz) fracaso

$\theta = 1/2$

Tiro 1 vez = C, C, C, X, ⋮ (100, ∞)

$$P(\text{éxito}) = \frac{nE}{n_{total}} = \frac{nE}{n}$$

límite

• La estadística (básica) que usamos se basa en la frecuencia relativa.

• La estadística bayesiana se basa en la creencia subjetiva sobre θ.

• Cojo otra vez este experimento:

Tiro la moneda $\underline{\theta}$, θ v.a

$P(\text{cara}) = \frac{1}{2}$

Si θ es v.a, tiene una distribución: "se distribuye de alguna manera basada en mi experiencia"

La realización concreta con la muestra (números) hará que tenga una distribución final de θ que ha cambiado por $x_1, \dots, x_n$ (muestra). Esto se hace con el teorema de Bayes.

• Teorema de Bayes:

B, A dos sucesos elementales

$$\boxed{Pr(B|A) = \frac{Pr(A|B) \cdot Pr(B)}{Pr(A)} = \frac{Pr(A|B) \cdot Pr(B)}{\sum_{B_i} Pr(A|B_i) \cdot Pr(B_i)}}$$ cogiendo $Pr(A)$ por marginal

$$\boxed{f(\theta|x_1, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, \dots, x_n|\theta) f(\theta)}{\int_{\theta \in \Theta} f(x_1, \dots, x_n|\theta) f(\theta) d\theta}}$$

$f(x_1, \dots, x_n|\theta)$ función de densidad conjunta de la muestra

$f(\theta) = \pi(\theta) \Longrightarrow \pi(\theta)$ distribución a priori de θ (lo que yo opino)

$\pi(\theta|x_1, \dots, x_n)$ distribución final o a posteriori de θ

$\pi(\theta|x_1, \dots, x_n)$ o bien una medida de centralización de la

Familia conjugada

$P_1 = \{ \pi(\theta) : \vec{\alpha} \in A \}$ $\quad \theta$ v.a, $\vec{\alpha}$ parámetros

Esta familia es conjugada de la familia de funciones de densidad de la población.

$\rightarrow$ π final tiene que ser $\in P_1$, $\pi(\theta | x_1, \dots, x_n)$ $\vec{\alpha} \in A$?

$P_2 = \{ f(\vec{x}|\theta) ; \theta \in \Theta \}$

- CASOS :

1) $\theta \sim \pi(\theta)$ Beta

$f(\vec{x}|\theta)$ población $\underbrace{\text{Bernoulli, binomial}}_{\text{más frecuentes}}$ o binomial negativa

$\Rightarrow$ familia conjugada $\Rightarrow \pi(\theta | x_1, \dots, x_n)$ Beta

2) $\theta \sim \pi(\theta)$ Gamma

$f(\vec{x}|\theta)$ población poisson o exponencial

$\Rightarrow$ familia conjugada $\Rightarrow$ distribución final $\pi(\theta | x_1, \dots, x_n)$ Gamma

3) $\theta \sim \pi(\theta)$ Normal (μ_0, σ_0^2)

$f(\vec{x}|\theta)$ población Normal (μ, σ^2), σ^2 conocido

$\Rightarrow$ familia conjugada $\Rightarrow$ $\pi(\theta | x_1, \dots, x_n)$ Normal

- Ejemplos :

1) $X \sim$ Binomial (n, θ)

$x_1, \dots, x_n$ muestra de tamaño n (m.a.s)

A priori: $\theta \sim \pi(\theta) = \text{Beta}(p, q)$

Demostrar que es una Beta y obtener los parámetros.

La distribución final viene dada por Bayes :

$$\pi(\theta | x_1, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, \dots, x_n | \theta)\, \pi(\theta)}{\int_{\theta \in \Theta} f(x_1, \dots, x_n) \pi(\theta)\, d\theta} \quad \circledast$$

$$\pi(\theta) = \frac{1}{\beta(p,q)} \theta^{p-1} (1-\theta)^{q-1} , \quad \theta \in (0,1)$$

Función de densidad conjunta de la muestra :

$$f(x_1, \dots, x_n | \theta) = \prod_{i=1}^{n} \binom{n}{x_i} \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-\theta)^{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$(*) = \frac{\frac{1}{B(p,q)}\,\theta^{p-1}(1-\theta)^{q-1}\prod\binom{n}{x_i}\,\theta^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}}{\int_0^1 \frac{1}{B(p,q)}\,\theta^{p-1}(1-\theta)^{q-1}\prod\binom{n}{x_i}\,\theta^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}\,d\theta} =$$

$$= \frac{\theta^{p-1+\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta)^{q-1+n-\sum_{i=1}^n x_i}}{\int_0^1 \theta^{p-1+\sum x_i}(1-\theta)^{q-1+n-\sum x_i}\,d\theta} = \frac{\theta^{(a-1)}(1-\theta)^{(b-1)}}{\int_0^1 \theta^{(a-1)}(1-\theta)^{(b-1)}\,d\theta} = \frac{\theta^{(a-1)}(1-\theta)^{(b-1)}}{B(a,b)} =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a-1 = p-1+\sum x_i \Rightarrow a = p+\sum x_i \\ b-1 = q-1+n-\sum x_i \Rightarrow b = q+n-\sum x_i \end{array}}$$

$$= \text{Beta}(a,b) = \pi(\theta|x_1,\dots,x_n)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a = p+\sum x_i \\ b = q+n-\sum x_i \end{array}}$$

2) $X \sim \text{Poisson}(\theta),\ \theta > 0$

$x_1,\dots,x_n$ m.a.s tamaño n

$\theta \sim \pi(\theta) = \text{Gamma}(p,q)$

Obtener distribución final.

$$\pi(\theta) = \frac{p^q}{\Gamma(q)} e^{-p\theta}\theta^{q-1}$$

$$f(x_1,\dots,x_n) = \frac{e^{-n\theta}\theta^{\sum x_i}}{\prod x_i!}$$

$$\pi(\theta|\vec{x}) = \frac{f(x_1,\dots,x_n|\theta)\,\pi(\theta)}{\int_\Theta f(\vec{x}|\theta)\,\pi(\theta)\,d\theta} = \frac{e^{-p\theta}\theta^{q-1}e^{-n\theta}\theta^{\sum x_i}}{\int_0^\infty e^{-(n+p)\theta}\theta^{q-1+\sum x_i}\,d\theta} = \frac{e^{-(n+p)\theta}\theta^{q-1+\sum x_i}}{\frac{\Gamma(b)}{a^b}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a = n+p \\ b-1 = q-1+\sum x_i \Rightarrow b = q+\sum x_i \\ \int_0^\infty e^{-a\theta}\theta^{b-1}\,d\theta = \frac{\Gamma(b)}{a^b} \end{array}}$$

$$= \underbrace{\frac{a^b}{\Gamma(b)} e^{-a\theta}\theta^{b-1}}_{\text{Distribución Gamma }(a,b)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a = n+p \\ b = q+\sum x_i \end{array}}$$

3) $X \sim N(\theta, \sigma^2)$ $\qquad \theta = \mu$

$x_1,\dots,x_n$ $\qquad \sigma^2$ conocido

$\theta \sim \pi(\theta) = N(\mu_0, \sigma_0^2)$

$$\pi(\mu|\vec{x}) = \frac{f_\theta(\vec{x})\,\pi(\theta)}{\int_\Theta f_\theta(\vec{x})\,\pi(\theta)\,d\theta}$$

$$f_\theta(\vec{x})\,\pi(\theta) = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu)^2 - \frac{1}{2\sigma_0^2}(\mu-\mu_0)^2} = (*)$$

$$\sum(x_i-\mu)^2 = \sum(x_i-\bar{x}+\bar{x}-\mu)^2 = \sum x_i^2 + n\mu^2 - 2n\bar{x}\mu$$

$$(\mu-\mu_0)^2 = \mu^2+\mu_0^2-2\mu\mu_0$$

$$(*) \overset{\rightarrow}{=} -\frac{1}{2}\left[\frac{(\sum x_i^2+n\mu^2-2n\bar{x}\mu)\sigma_0^2 + (\mu^2+\mu_0^2-2\mu\mu_0)\sigma^2}{\sigma^2\,\sigma_0^2}\right] =$$

Constantes que no dependen de μ (se nos consideran)

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\mu^2 - 2\mu\left(\frac{n\bar{x}\sigma_0^2 + \mu_0\sigma^2}{n\sigma_0^2+\sigma^2}\right) + A}{\frac{\sigma_0^2\sigma^2}{(n\sigma_0^2+\sigma^2)}}\right] =$$

Sumo y resto B^2

$$B = \frac{n\bar{x}\sigma_0^2 + \mu_0\sigma^2}{n\sigma_0^2+\sigma^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{(\mu-B)^2}{\frac{\sigma^2\sigma_0^2}{n\sigma_0^2+\sigma^2}} + C\right]$$

Constantes que no dependen de μ

$$\pi(\theta|\vec{x}) = \frac{f(\vec{x}|\pi(\theta))}{\int_\theta f(\vec{x}|\pi(\theta))\,d\theta} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\mu-B)^2}{D}\right]}}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\mu-B)^2}{D}\right]}d\mu} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\mu-B)^2}{D}\right]}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{D}} \sim N(B,D)$$

Media B

Varianza D

Llamamos
$$B = \mu_1 = \frac{\mu_0\sigma^2 + n\bar{x}\sigma_0^2}{n\sigma_0^2+\sigma^2} = \frac{\frac{\mu_0}{\sigma_0^2} + \frac{\bar{x}n}{\sigma^2}}{\frac{n\sigma^2+\sigma^2}{\sigma_0^2\sigma^2}} = \frac{\frac{\mu_0}{\sigma_0^2} + \bar{x}\left(\frac{n}{\sigma^2}\right)}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \left(\frac{n}{\sigma_0^2}\right)}$$

No memorizar — Memorizar

$$D = \sigma_1^2 = \frac{\sigma^2\sigma_0^2}{n\sigma_0^2+\sigma^2} = \frac{1}{\frac{n\sigma_0^2+\sigma^2}{\sigma^2\sigma_0^2}} = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \left(\frac{n}{\sigma^2}\right)}$$

- Definición de función pérdida:

Es una función $L: \Theta \times \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

a) $L(\theta,\hat{\theta}) \geq 0, \ \forall \theta,\hat{\theta} \in \Theta$

θ v.a. $\pi(\theta|\vec{x})$, $\hat{\theta} = \mu_1$

b) $L(\theta,\hat{\theta}) = 0$ si $\theta = \hat{\theta}$

c) $L(\theta,\hat{\theta}_1) \leq L(\theta,\hat{\theta}_2)$

- Ejemplos:

→ $L(\theta,\hat{\theta}) = |\theta - \hat{\theta}|$ ERROR ABSOLUTO DE LA ESTIMACIÓN

→ $L(\theta,\hat{\theta}) = (\theta-\hat{\theta})^2$ FUNCIÓN PÉRDIDA CUADRÁTICA

- Riesgo de un estimador o pérdida final:

El estimador óptimo θ^* es el que minimiza la función pérdida final

$$R(\theta,\hat{\theta}) = E[L(\theta,\hat{\theta})] = \int_\theta L(\theta,\hat{\theta})\pi(\theta|\vec{x})\,d\theta$$

- Ejemplo:

Si nuestra función pérdida es la función pérdida cuadrática, entonces $R(\theta,\hat{\theta}) = E[(\theta-\hat{\theta})^2]$

- **Teorema:**

Si la función pérdida es cuadrática, el estimador bayesiano es la esperanza de la distribución a posteriori.

- **Demostración:**

$$\theta^* = E[\pi(\theta|\vec{x})]$$

$$R(\theta,\hat{\theta}) = E[(\theta-\hat{\theta})^2|_{\vec{x}}] = E[(\theta-\theta^*+\theta^*-\hat{\theta})^2] = \int_\theta (\theta-\theta^*)^2 + (\theta^*-\hat{\theta})^2$$

$$= \int_\theta [(\theta-\theta^*)^2 + (\theta^*-\hat{\theta})^2 + \underbrace{2(\theta-\theta^*)(\theta^*-\hat{\theta})}] \pi(\theta|\vec{x})\, d\theta =$$

$$2(\theta^*-\hat{\theta}) \int_\theta (\theta-\theta^*) \pi(\theta|\vec{x})\, d\theta = 0 =$$

$$= 2(\theta^*-\hat{\theta}) \underbrace{\left[\int_\theta \theta\pi(\theta|\vec{x})\,d\theta\right] - \theta^* \int_\theta \pi(\theta|\vec{x})\,d\theta}_{\theta^*-\theta^*}$$

$$= V(\theta) + (\theta^*-\hat{\theta})^2$$

$$\hat{\theta} = \theta^* = E[\pi(\theta|\vec{x})]$$

$$R(\theta,\hat{\theta}) = V(\theta)$$

Intervalos creíbles

θ v.a , $\theta \sim \pi(\theta|\vec{x})$

$\hat{\theta}$ estadístico bayesiano

$\theta \in [\theta_1(x_1,\dots,x_n), \theta_2(x_1,\dots,x_n)]$

Fijo $\alpha \in (0,1)$:

$$\boxed{P_r(\theta_1(x_1,\dots,x_n) \le \underset{\pi(\theta|\vec{x})}{\theta} \le \theta_2(x_1,\dots,x_n)) = 1-\alpha}$$

← Intervalo creíble con grado $1-\alpha$ (si estamos en dimensión 1)

PROBLEMAS TEMA 4. PARTE 1

1. Para una m.a.s de tamaño n de una población Bernoulli(θ), encontrar un estimador centrado de $h(\theta) = \theta^2$.

Sabemos que un estimador T es centrado si $E[T(\vec{X})] = h(\theta) = \theta^2$

Estamos ante una población Bernoulli(θ), luego $f_\theta(x) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}$, con $x = 0, 1$

$$P(X=0) = \theta^0(1-\theta)^1 = 1-\theta$$
$$P(X=1) = \theta^1(1-\theta)^0 = \theta$$

Sea $w = \begin{cases} 1 & \text{si } X_1 \cdot X_2 = 1 \text{ (pruebas con } X_1, X_2, X_3, X_4 \ldots) \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$

$$P(w=1) = P(X_1 \cdot X_2 = 1) = \theta^2 \quad (P(X_1=1) \cdot P(X_2=1))$$

$\longrightarrow E[w] = 1 \cdot P(X_1 \cdot X_2) + 0 \cdot P(\text{resto}) = \theta^2$

Entonces $E[w] = \theta^2$, luego $\boxed{T(X_1, \ldots, X_n) = X_1 \cdot X_2}$ es un estimador centrado para $h(\theta) = \theta^2$.

3. Para una m.a.s de tamaño n de una población $U(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$, estudiar si el estimador $T(\vec{X}) = X_{(n)} - X_{(1)}$ es centrado para $h(\theta) = \theta$.

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\underbrace{\theta + \frac{1}{2} - \theta + \frac{1}{2}}_{(\theta+\frac{1}{2})-(\theta-\frac{1}{2})}} = 1 \Rightarrow F_\theta(x) = \int_{\theta-\frac{1}{2}}^{x} 1\, dx = x\Big]_{\theta-\frac{1}{2}}^{x} = x - \theta + \frac{1}{2}$$

- $F_{X_{(n)}}(y) = P(X_{(n)} \leq y) = (F(y))^n \Rightarrow f_{X_{(n)}}(y) = \frac{\partial F_{X_{(n)}}}{\partial y} = n(F(y))^{n-1} f(y) = n(y - \theta + \frac{1}{2})^n$
- $F_{X_{(1)}}(y) = \underbrace{1 - (\theta - y + \frac{1}{2})^n}_{1-F(y)} \Rightarrow f_{X_{(1)}}(y) = n[1 - F(y)]^{n-1} f(y) = n(\theta - y + \frac{1}{2})^{n-1}$

$\longrightarrow E[X_{(n)}] = \displaystyle\int_{\theta-\frac{1}{2}}^{\theta+\frac{1}{2}} ny(y - \theta + \tfrac{1}{2})^{n-1} dy = \frac{n}{n+1} + \theta - \frac{1}{2}$

$\longrightarrow E[X_{(1)}] = \displaystyle\int_{\theta-\frac{1}{2}}^{\theta+\frac{1}{2}} yn(\theta - y + \tfrac{1}{2})^{n-1} dy = \theta + \frac{1}{2} - \frac{n}{n+1}$

Revisar cálculos

(Dado que $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$ son independientes, luego no se puede hacer $f(X_{(1)}) \cdot f(X_{(n)})$)

$\Longrightarrow E[X_{(n)} - X_{(1)}] = \frac{n-1}{n+1} \neq h(\theta) = \theta \Longrightarrow$ $\boxed{T \text{ no es centrado para } h(\theta) = \theta}$

5. Para una m.a.s de tamaño n de una población Binomial Negativa $(1,\theta)$, obtener el ECMV para $h(\theta)=P_\theta\{X=0\}$.

Se trata de una población Binomial Negativa $(1,\theta)$, luego

$$P(X_{(1,\theta)}) = \binom{x+r-1}{x}\theta^r(1-\theta)^x, \quad x=0,1,2,\dots \quad \begin{matrix}\theta>0\\ r=1\end{matrix}$$

$$h(\theta)=P_\theta(X=0)=\theta$$

$$P_\theta(\vec{x}) = k\theta^n(1-\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i} \Longrightarrow \ln(P_\theta(\vec{x})) = \ln k + n\ln\theta + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\ln(1-\theta)$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial\theta}(\ln(P_\theta(\vec{x}))) = \frac{n}{\theta} + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(-\frac{1}{1-\theta}\right) = \frac{1}{1-\theta}\left[\underbrace{\sum_{i=1}^n x_i}_{T(\vec{x})} - \underbrace{\left(\frac{n(1-\theta)}{\theta}\right)}_{h(\theta)}\right]$$

$\Longrightarrow$ ECMV para $h(\theta)=\frac{n(1-\theta)}{\theta}$

- Construimos $w = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i=0 \\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$

$\longrightarrow P(w=1)=P(x_i=0) \longrightarrow E[w]=1\cdot P(x_i=0)=\theta$

$$P_\theta(\vec{x}) = \theta^n(1-\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i} = \theta^n e^{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\ln(1-\theta)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \longrightarrow c(\theta)=\theta^n \\ T(\vec{x})=\sum_{i=1}^n x_i \\ Q(\theta)=\ln(1-\theta)\end{array}\right\} \text{FAMILIA EXPONENCIAL UNIPARAMÉTRICA}$$

$\Longrightarrow T(\vec{x})=\sum_{i=1}^n x_i$ es suficiente, y además, es completo, ya que

$$\begin{array}{l} Q:\Theta \longrightarrow \mathbb{R} \\ \theta \longrightarrow \ln(1-\theta) \\ \theta>0 \end{array}$$ contiene un intervalo

$\Longrightarrow T(\vec{x})$ es minimal suficiente

- $H(t) = E[w|_T] = 1\cdot P(w|_T) = P\left(w=1, \sum_{i=1}^n x_i = t\right) = P\left(x_i=0, \sum_{i=1}^n x_i=t\right) =$

$$= P(x_i=0)\cdot P\left(\sum_{i=1}^n x_i=t\right) = \frac{\binom{t+n-1-1}{t}\cancel{\theta}^{n-1}(1-\cancel{\theta})^t}{\binom{t+n-1}{t}\cancel{\theta}^n(1-\cancel{\theta})^t} = \frac{n-1}{t+n-1}$$

La suma de X_i binomiales negativas es $BN(n,\theta)$

¿Cómo lo saca?

$$\Longrightarrow E[w|_T] = \frac{n-1}{t+n-1}$$

$\Longrightarrow$ Por Lehman-Scheffé: ECMV para $h(\theta)=P_\theta(X=0) \equiv \boxed{T(\vec{x}) = \frac{n-1}{t+n-1}}$

PROBLEMAS TEMA 4. PARTE 2

1. Para una m.a.s de tamaño 1 de una población $N(0, \sigma^2)$, se pide:
   - Obtener un estimador centrado para σ^2.
   - ¿Cuál es el EMV para σ?

a) Buscamos T tal que $E[T(x)] = \sigma^2$

Probemos algunos:

$E[\overline{X}] = 0$ ✗

$E[S^2] = \sigma^2$ ✓

$E[X] = 0$ ✗

$E[X^2] = V(X) + (\overset{0}{E[X]})^2 = \sigma^2$ ✓

Nos quedaremos con $\boxed{T = x^2}$, que es más fácil de trabajar que S^2.

b) Se trata de una población normal $(0, \sigma^2)$, luego

$$f_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2} \qquad \begin{matrix} -\infty < x < \infty \\ \sigma > 0 \end{matrix}$$

Hacemos ln en ambos lados:

$$\ln f_\sigma(x) = -\ln\sqrt{2\pi} - \ln\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}x^2$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}(\ln f_\sigma(x)) = -\frac{1}{\sigma} + \frac{x^2}{\sigma^3} = 0 \Longrightarrow \frac{x^2}{\sigma^3} = \frac{1}{\sigma} \Longrightarrow x^2 = \sigma^2$$

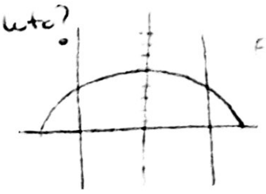
De modo que $\boxed{\hat{\sigma} = |x|}$

Veamos si es máximo absoluto:

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(\ln f_\theta(x)) = \frac{1}{\sigma^2} - \frac{3x^2}{\sigma^4} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\sigma^2} - \frac{3\sigma^2}{\sigma^4} = \frac{-2}{\sigma^2} < 0 \Longrightarrow \underline{\text{Máximo relativo}}$$

$\hat{\sigma} = |x|$

¿Absoluto?



El punto crítico es el estimador

$\hat{\sigma} = |x|$

$-\sigma^2 + x^2 < 0$

$x^2 < \sigma^2$

$-\infty < x < \infty$

$|x| > 0 \longrightarrow \max |x|$

$|x| < 0 \longrightarrow \max 0 \notin$ dominio

¿?

$\Rightarrow$ <u>No existe el EMV</u> porque el máximo puede estar en el caso en el que no pertenece al dominio

2. Para una m.a.s de tamaño n de una población $U(0,\theta)$, encontrar el/los estimadores de máxima verosimilitud.

Lo podríamos hacer como en el ejercicio 1, pero observamos que $x \in (0, \underline{\theta})$, por lo que basta estudiar el máximo de $f_\theta(\vec{x}) = \frac{1}{\theta^n}$

$0 \quad X_{(1)} \quad X_{(n)} \quad \theta$

$\theta \in [X_{(n)}, \infty) \Longrightarrow \boxed{\text{El EMV es } X_{(n)}}$

3 Para una m.a.s de tamaño n de una población $N(\theta, 1)$, sólo se registra si cada observación es menor o igual que cero o mayor. Si sabe que ha habido m valores menores o iguales que cero, con $m<n$, encontrar el EMV de θ.

Definimos $\begin{cases} 1 & \text{menor o igual que cero} \\ 0 & \text{mayor que cero} \end{cases}$ (Bernoulli)

es decir, $Y_i = \begin{cases} 1 & X_i \leq 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$

$\sum_{i=1}^{n} Y_i = m < n$ (ha habido m valores ≤ 0)

$N(0,1) \rightarrow$ Tipificamos para una $N(0,1)$

$Pr(Y_i = 1) = Pr(X_i \leq 0) = F(x_i) = Pr(X_i - \theta \leq -\theta) = 1 - Pr(X_i - \theta \geq \theta) = 1 - (1 - Pr(X_i - \theta \leq \theta))$

$(1 - \phi(\theta)) = \phi(\theta)$ $\qquad \phi \rightarrow$ función característica de la $N(0,1)$

$\Rightarrow Pr(Y_i = 1) = 1 - \phi(\theta)$

$\sum_{i=1}^{n} Y_i = m < n$

$f_\theta(\vec{x}) = \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-\theta)^{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}$

Hacemos ln:

$\theta n - \theta \cancel{\sum x_i} = \sum x_i - \theta \sum x_i \rightarrow \theta = \frac{\sum x_i}{n}$

$\ln f_\theta(\vec{x}) = (\sum_{i=1}^{n} x_i) \ln \theta + (n - \sum_{i=1}^{n} x_i) \ln(1-\theta)$

$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f_\theta(\vec{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta} - \frac{(n - \sum_{i=1}^{n} x_i)}{1-\theta} = 0 \Longrightarrow \boxed{\hat{\theta} = \overline{x}}$

Con la segunda derivada <0 comprobamos que es máximo relativo y, después, hay que ver que no se producen en los extremos, hallamos máximo global $\Rightarrow \hat{\theta} = \overline{x}$ EMV para $1 - \phi(\theta)$

- $\phi(\theta) = 1 - \overline{x} \xrightarrow{g} 1 - \phi(\theta) = g(\theta) = \overline{x}$

  $\hat{\theta} = \phi^{-1}(1 - \overline{x}) \xleftarrow{g^{-1}} \phi(\theta) = -g(\theta) + 1 \Rightarrow \theta = \phi^{-1}(-g(\theta) + 1)$

(Hacemos esto porque hemos hallado el EMV para $1 - \phi(\theta)$, pero lo queremos para θ)

¿Y ahora qué? ¿Solución?

4. Determinar los EMV., con m.a.s de tamaño n, para θ en los siguientes casos:

a) $f(x|\theta) = \frac{1}{\theta} I_{\{1,2,\dots,\theta\}}(x)$, θ entero positivo

b) $f(x|\theta) = e^{-x+\theta} I_{[0,\infty)}(x)$, $\theta \in \mathbb{R}$

a) $f_\theta(\vec{x}) = \frac{1}{\theta^n} \underbrace{\prod_{i=1}^{n} I_{\{1,2,\dots,\theta\}}(x)}_{\circledast}$

¿ $I_{(1,\theta)}(x) \cdot \prod I_{\mathbb{N}\setminus\{0\}}$?

$1 \quad X_{(1)} \quad X_{(n)} \quad \theta$

$\theta \in [X_{(n)}, \infty) \Longrightarrow \boxed{X_{(n)} \text{ EMV}}$

• **NOTA:** Siempre hacemos ln... y cuando nos den cosas raras observamos qué es lo que hace máxima la función

→ Si está acotada por el parámetro van a ser máx o mín $X_{(n)}, X_{(1)}$

→ Si no, si es cerrado $\circledast$ sí y si es abierto no van a existir

b) $f_\theta(\vec{x}) = e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i + n\theta}$ ← Si fuera $I_{[\theta,\infty)}$

$\theta \quad X_{(1)} \quad X_{(n)} \quad \infty$

$\theta \in (-\infty, X_{(1)}] \Longrightarrow \boxed{\text{El EMV es } X_{(1)}}$

→ En nuestro caso: $I_{[0,\infty)}$

$f_\theta(\vec{x}) = e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i + n\theta}$ $\qquad 0 \leq x_i < \infty$

$\ln f_\theta(\vec{x}) = -\sum_{i=1}^{n} x_i + n\theta$

Carlos tiene θ $n = 0$

$\frac{\partial}{\partial\theta}(\ln f_\theta(\vec{x})) = n = 0 \Longrightarrow$ ¿Conclusión? ¿No hay?

• Otro caso: $I_{[0,8]}(x)$, $\theta \in [0,8]$

EMV → 8

PROBLEMAS TEMA 4. PARTE 3

1. Para una m.a.s de tamaño n de una población Poisson(θ), supuesto que la distribución inicial a priori del parámetro θ viene dada por una distribución Gamma(a,p), con $a>0$, $p>0$. Se pide:

- Probar que la familia Gamma es conjugada respecto a la población Poisson.
- Calcular la media y la varianza de la distribución final.
- Calcular la pérdida final esperada para el estimador bayesiano.

a) m.a.s tamaño n Poisson(θ)

$\pi(\theta) \sim$ Gamma(a,p)

Tenemos que ver que $\pi(\theta|\vec{x}) \sim$ gamma(a_1, p_1)

Se trata de una población Poisson(θ), luego $f_\theta(\vec{x}) = e^{-n\theta}\theta^{\sum x_i}$, $\theta>0$

$$\underset{\text{gamma}}{\pi(\theta)} = \frac{a^p}{\Gamma(p)} e^{-a\theta}\theta^{p-1}, \quad a,p>0$$

De modo que

$$\pi(\theta|\vec{x}) = \frac{f_\theta(\vec{x})\cdot \pi(\theta)}{\int_\Theta f(\vec{x})\pi(\theta)\,d\theta} = \frac{\theta^{p_1-1}e^{-a_1\theta}}{\frac{\Gamma(p_1)}{a_1^{p_1}}} \sim \text{gamma}(a_1,p_1)$$

$$\int_\Theta f(\vec{x})\pi(\theta)d\theta = \int_\Theta e^{-n\theta}\theta^{\sum x_i}e^{-a\theta}\theta^{p-1}\,d\theta = \int_0^\infty \theta^{\sum x_i+p-1}e^{-n\theta-a\theta}\,d\theta =$$

$$= \int_0^\infty \theta^{\sum x_i+p-1}e^{-(n+a)\theta}\,d\theta = \frac{\Gamma(p_1)}{a_1^{p_1}}$$

$a_1 = n+a$

$p_1 - 1 = \sum x_i + p - 1 \longrightarrow p_1 = \sum x_i + p$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\pi(\theta|\vec{x}) \sim \text{Gamma}(a_1,p_1) \\ a_1 = n+a \\ p_1 = \sum x_i + p\end{array}}$$

¿ $L(\theta,\hat{\theta}) = |\theta,\hat{\theta}|^2$, $\hat{\theta} = E[\pi(\theta|\vec{x})]$? Para qué ?

b) $\underbrace{E[\pi(\theta|\vec{x})]}_{E[\theta]} = \int_0^\infty \theta \frac{a_1^{p_1}}{\Gamma(p_1)} \theta^{p_1-1} e^{-a_1\theta} d\theta = \frac{a_1^{p_1}}{\Gamma(p_1)} \int_0^\infty \theta\theta^{p_1-1} e^{-a_1\theta} d\theta =$

$\theta \sim \pi(\theta|\vec{x})$

$$= \frac{a_1^{p_1}}{\Gamma(p_1)} \underbrace{\int_0^\infty \theta^{p_1} e^{-a_1\theta} d\theta}_{\substack{p'-1=p_1 \to p'=p_1+1 \\ \frac{\Gamma(p_1+1)}{a_1^{p_1+1}}}} = \frac{a_1^{p_1}}{\Gamma(p_1)} \frac{\Gamma(p_1+1)}{a_1^{p_1+1}} = \frac{p_1\Gamma(p_1)}{a_1\Gamma(p_1)} = \frac{p_1}{a_1}$$

¿Fracción o aclaración?

$$\Longrightarrow \boxed{\underbrace{E[\pi(\theta|\vec{x})]}_{E[\theta]} = \frac{p_1}{a_1}}$$

- $V(\theta) = E[\theta^2] - (E[\theta])^2$

$$E[\theta^2] = \int_0^\infty \theta^2 \frac{a_1^{p_1}}{\Gamma(p_1)} \theta^{p_1-1} e^{-a_1\theta} d\theta = \frac{a_1^{p_1}}{\Gamma(p_1)} \underbrace{\int_0^\infty \theta^{p_1+1} e^{-a_1\theta} d\theta}_{p'-1=p_1+1 \to p'=p_1+2} = \frac{a_1^{p_1}}{\Gamma(p_1)} \frac{\Gamma(p_1+2)}{a_1^{p_1+2}} =$$

$$= \frac{(p_1+1)\Gamma(p_1+1)}{\Gamma(p_1)a_1^2} = \frac{(p_1+1)p_1\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1)a_1^2} = \frac{p_1(p_1+1)}{a_1^2}$$

$$\Longrightarrow V(\theta) = \frac{p_1(p_1+1)}{a_1^2} - \frac{p_1^2}{a_1^2} = \frac{p_1^2+p_1-p_1^2}{a_1^2} = \frac{p_1}{a_1^2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{V(\theta) = \frac{p_1}{a_1^2}}$$

c) El estimador bayesiano será la esperanza, es decir,

$$\boxed{E.B = \frac{p_1}{a_1}}$$

Y la pérdida final esperada será la varianza, es decir,

$$\boxed{P.F.E = \frac{p_1}{a_1^2}}$$

2. Se tiene la sospecha de que una moneda está sesgada, en el sentido de que su probabilidad de cara es menor que 0.5. Si esta información se modeliza mediante una distribución Beta (10,8) como distribución inicial, ¿cuál es el estimador bayesiano cuando después de tirar la moneda 50 veces se obtienen 20 caras? Utilizar como función pérdida el valor absoluto.

Se trata de una población X~Bernoulli, luego $f_\theta(\vec{x}) = \theta^{\sum x_i}(1-\theta)^{n-\sum x_i}$

$X_1, \dots, X_n$, $n=50$ (se tira 50 veces la moneda)

$\pi(\theta) = \text{Beta}(\underset{p_0}{10}, \underset{q_0}{8})$

$\sum_{i=1}^{n} x_i = 20$ (Se obtienen 20 caras)

¿ $L = (\theta - \hat{\theta})$ Mediana ?
¿Para qué?

$$\pi(\theta) = \frac{1}{\beta(10,8)} \theta^{p_0-1}(1-\theta)^{q_0-1} I_{(0,1)}(\theta)$$

$$\pi(\theta|\vec{x}) = \frac{f_\theta(\vec{x})\pi(\theta)}{\int_\theta f_\theta(\vec{x})\pi(\theta)d\theta} = \frac{\theta^{\sum x_i + p_0 - 1}(1-\theta)^{n-\sum x_i + q_0 - 1}}{\int_0^1 \theta^{\sum x_i + p_0 - 1}(1-\theta)^{n - \sum x_i + q_0 - 1} d\theta} = \frac{\theta^{p_1-1}(1-\theta)^{q_1-1}}{\beta(p_1, q_1)} =$$

$p_1 - 1 = \sum x_i + p_0 - 1$
$q_1 - 1 = n - \sum x_i + q_0 - 1$

$$= \frac{\theta^{29}(1-\theta)^{37}}{\beta(30,38)} \sim \text{Beta}(30,38)$$

$p_1 = 20+30$
$q_1 = 50-20+8$

Habría que hallar la esperanza ¿no?

3. La proporción θ de votantes a un determinado partido político en unas elecciones es desconocida y su distribución inicial es Beta (4,10).

- Se toma una m.a.s de 1000 votantes y se encuentra que 125 van a votar al partido político. Con pérdida cuadrática, ¿cuál es el estimador bayesiano para θ?

- Si se cambia el sistema de muestreo y se necesitan 1000 personas hasta conseguir que 125 voten al partido, ¿cuál es el estimador bayesiano para θ con pérdida cuadrática?

a) $\theta \sim \text{Beta}(4,10)$ $\theta \sim$ proporción votantes A

$n = 1000$

$\sum x_i = 125$

$$\pi(\theta|\vec{x}) = \text{Beta}(p_0 + \sum x_i, n - \sum x_i + q_0) = \text{Beta}(\overset{125+4}{129}, \overset{1000-125+10}{885})$$

$$\hat{\theta} = E[\pi(\theta|\vec{x})] = \int_0^1 \theta \frac{1}{\beta(p,q)} \theta^{p-1}(1-\theta)^{q-1} d\theta = \frac{1}{\beta(p,q)} \int_0^1 \theta^p (1-\theta)^{q-1} d\theta =$$

$$= \frac{\beta(p+1,q)}{\beta(p,q)} = \frac{\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}}{\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}} = \frac{\frac{p\Gamma(p)}{(p+q)\Gamma(p+q)}}{\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)}} = \frac{p}{p+q}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\hat{\theta} = \frac{p}{p+q}}$$

$k = 125$
$x = 1000$

b) $k = 125$ éxitos

$$f_\theta(\vec{x}) = BN(x|k,\theta) = \binom{x-1}{x-k}\theta^k(1-\theta)^{x-k} \overset{\downarrow}{=} \binom{999}{875}\theta^{125}(1-\theta)^{875}$$

$$f_\theta(\vec{x})\,\pi(\theta) = \binom{999}{875}\theta^{128}(1-\theta)^{884} \sim Beta(129, 885)$$

$\uparrow$ apartado a) $\qquad 125+4-1 \qquad 875+10-1$

($\rightarrow$ Hallamos $\pi(\theta|\vec{x}) = \dfrac{f_\theta(\vec{x})\pi(\theta)}{\int_\theta f_\theta(\vec{x})\pi(\theta)d\theta}$ y hallamos su esperanza)

4. A una persona se le pasa un test de inteligencia, cuyo resultado X se supone que sigue una distribución Normal$(\theta, \sigma = 10)$, donde θ es su nivel de inteligencia real. Supongamos que en el colectivo al que pertenece la persona, la inteligencia θ se distribuye según Normal$(100, 15)$. ¿Cuál sería el estimador bayesiano de θ si se supone pérdida cuadrática? ¿cuánto valdrá éste si la persona tiene como resultado del test el valor 110? ¿Cuál es la pérdida final esperada correspondiente?

$X \sim N(\theta, 10)$

θ nivel de inteligencia

$\theta \sim N(100, 15) \leftarrow \pi(\theta)$

$n = 1 \rightarrow \dfrac{\Sigma x_i}{n} = 110 = \bar{X}$

$\pi(\theta|\vec{x}) \sim N(\mu_1, \sigma_1)$

$$\mu_1 = \frac{\frac{\mu_0}{\sigma_0^2} + \frac{\bar{X}n}{\sigma^2}}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}} = \frac{\frac{100}{15^2} + 110\cdot\frac{1}{10^2}}{\frac{1}{15^2} + \frac{1}{10^2}} = 106'923$$

$\bar{X} = 110$
$\sigma_0^2 = 15^2$
$\sigma^2 = 10^2$

$\boxed{E[\pi(\theta|\vec{x})] = \mu_1 \text{ estimador bayesiano}}$

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}} = \frac{1}{\frac{1}{15^2} + \frac{1}{10^2}} = 69'23$$

$\boxed{\sigma_1^2 = V[\pi(\theta|\vec{x})] \text{ pérdida final esperada}}$

(• Continuación del 3.5) :)

$$\pi(\theta|\vec{x}) = \frac{\theta^{128}(1-\theta)^{884}}{\int_0^\infty \theta^{\Sigma x_i + p_0 - 1}(1-\theta)^{n-\Sigma x_i + q_0 - 1}\, d\theta}$$

$$\int_0^\infty \theta^{\Sigma x_i + p_0 - 1}(1-\theta)^{n-\Sigma x_i + q_0 - 1} \sim \beta(129, 885)$$

$p_1 = \Sigma x_i + p_0 = 129$

$q_1 = n - \Sigma x_i + q_0 = 885$

$$\underbrace{E[\pi(\theta|\vec{x})]}_{E[\theta]} = \int_0^\infty \theta \frac{\theta^{128}(1-\theta)^{884}}{\beta(129,885)}\, d\theta = \int_0^\infty \frac{\theta^{129}(1-\theta)^{884}}{\beta(129,885)}\, d\theta = \frac{1}{\beta(129,885)} \underbrace{\int_0^\infty \theta^{129}(1-\theta)^{884} d\theta}_{\beta(130,885)}$$

$$= \frac{\beta(130,885)}{\beta(129,885)} = \frac{\frac{\Gamma(130)\cancel{\Gamma(885)}}{\Gamma(1015)}}{\frac{\Gamma(129)\cancel{\Gamma(885)}}{\Gamma(1014)}} = \frac{\Gamma(130)\Gamma(1014)}{\Gamma(129)\Gamma(1015)} =$$

$$= \frac{129\,\Gamma(\cancel{129})\,\Gamma(\cancel{1014})}{\Gamma(\cancel{129})\cdot 1014\,\Gamma(\cancel{1014})} = \frac{43}{338} \cong \boxed{0'127 \leftarrow \text{Estimador bayesiano}}$$

$$\bullet\ E[\theta^2] = \int_0^\infty \theta^2 \frac{\theta^{128}(1-\theta)^{884}}{\beta(129,885)} = \frac{\beta(131,885)}{\beta(129,885)} = \frac{\frac{\Gamma(131)\Gamma(885)}{\Gamma(1016)}}{\frac{\Gamma(129)\Gamma(885)}{\Gamma(1014)}} = \frac{\Gamma(131)\Gamma(1014)}{\Gamma(129)\Gamma(1015)}$$

$$= \frac{130\cdot 129\,\Gamma(\cancel{129})\,\Gamma(\cancel{1014})}{\Gamma(\cancel{129})\cdot 1014\,\Gamma(\cancel{1014})} = \frac{215}{13} \cong 16'538$$

$$V(\theta) = \frac{215}{13} - \left(\frac{43}{338}\right)^2 \cong \boxed{16'522 \leftarrow \text{P.F.E}}$$

⑧ H4.1 17-05-2017

Sea una m.a.s. de tamaño n, con función de densidad

(a) $f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} I_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0$

Obtener la cota de FCR y un estimador eficiente

$$f_\theta(\vec{x}) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n I_{(0,\infty)}(x_i)$$

$$\ln f_\theta(\vec{x}) = -n \ln\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f_\theta(\vec{x}) = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^n x_i = \underbrace{\frac{1}{\theta^2}}_{k(\theta)} \Big[\underbrace{\sum_{i=1}^n x_i}_{T(x_1,\dots,x_n)} - \underbrace{n\theta}_{h(\theta)}\Big]$$

$\leftarrow \frac{\partial}{\partial\theta} \ln f_\theta(\vec{x}) = k(\theta)[T(x_1\dots x_n) - h(\theta)]$

$\Rightarrow k(\theta) = \frac{1}{\theta^2}$

$T(x_1 \dots x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$

$h(\theta) = n\theta$

$$k(\theta) = \frac{I_n(\theta)}{h'(\theta)} = \frac{1}{\theta^2} \Rightarrow I_n(\theta) = k(\theta)\cdot h'(\theta) = \frac{1}{\theta^2}\cdot n = \frac{n}{\theta^2}$$

$\Rightarrow \boxed{COTA = \frac{h'(\theta)}{k(\theta)} = n\theta^2} \rightarrow$ Estimador eficiente $= \sum_{i=1}^n x_i$

(alcanza la cota para $h(\theta) = n\theta$)

ó

(Otra forma)

$$COTA = \frac{(h'(\theta))^2}{I_n(\theta)} = \frac{n^2}{\frac{n}{\theta^2}} = n\theta^2$$

(b) $P_\theta(x) = \theta(1-\theta)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad 0 < \theta < 1$

$$\ln P_\theta(\vec{x}) = n\ln\theta + \sum_{i=1}^n x_i (\ln(1-\theta))$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln P_\theta(\vec{x}) = \frac{n}{\theta} - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\cdot\frac{1}{1-\theta} = -\frac{n}{1-\theta}\left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} - \frac{(1-\theta)}{n}\right]$$

$$COTA = \frac{h'(\theta)}{k(\theta)} = \frac{-\frac{1}{\theta^2}}{-\frac{n}{1-\theta}} = \frac{1-\theta}{n\theta^2}$$

Estimador eficiente $= \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}$

⑥ H4.1

Para una m.a.s. de tamaño n de una población Bernoulli (θ) dado un número entero conocido con $0 < s < n$, obtener el ECMV para

(a) $h(\theta) = \theta^s$

$T(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ Sufic. completo

$H(T)$ ~~ECMV~~ ECMV

$E[H(T)] = h(\theta)$

$P(X=x) = \theta$

$W \in U_n$

$H(T) = E[W/T]$

$W \in U_n$, T suf + compl

$E[W] = h(\theta) = \theta^s$

$$W = \begin{cases} 1 & x_1 x_2 \dots x_s = 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

$E[W] = 1 \cdot Pr(W=1) = Pr(x_1 \dots x_s = 1) = Pr(x_i = 1)]^s$

$$E[W/T] = 1 \cdot Pr(W/T) = \frac{P(x_1 \dots x_s = 1; \sum x_i = t)}{P(\sum_2 x_i = t)}$$

Binomial (n, θ)

$Pr(\sum_{s+1}$