

APELLIDOS:	NOMBRE:	EDAD:	CALIFICACIÓN:
ASIGNATURA: Tratamiento de Señales Multimedia	FECHA: 14/03/2013	GRUPO:	

PRIMER PARCIAL
DURACIÓN: 2 horas

PROBLEMA 2 (2.75 puntos)

En el sistema que se muestra en la figura, la entrada y la salida del sistema LTI 1, cumplen la

relación $y[n] = \sum_{k=0}^{k=5} x[n-k]$.

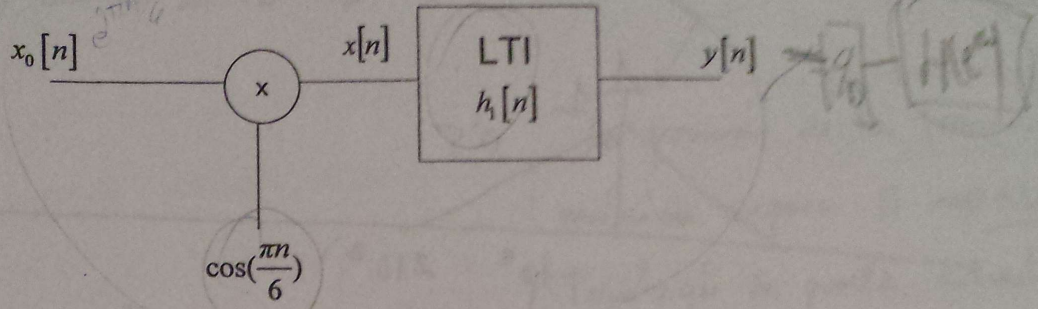


Figura 5

1. Represente gráficamente la respuesta al impulso del sistema $h_1[n]$ (0.5 puntos)
2. Determine si el sistema $h_1[n]$ es causal (0.25 puntos) y estable (0.25 puntos).
3. Determine, sin calcularla explícitamente, si la respuesta en frecuencia del sistema $h_1[n]$ presentará algún tipo de simetría (0.25 puntos)
4. La entrada al sistema es $x_0[n] = \exp(j(\pi n/6))$. Determine si se trata de una entrada periódica (0.25 puntos)
5. Determine el espectro de $y[n]$ (1 punto)
6. Determine si puede determinarse, basándose únicamente en la salida que ha calculado, si el sistema global es LTI (0.25 puntos)
7. Si el sistema de la figura se utiliza para procesar señales en tiempo continuo mediante conversores con $T_s = 0.5\pi \cdot 10^{-3}$ sg, determine el valor máximo de la frecuencia de las señales que puede procesar el sistema (0.25 puntos)

PROBLEMA 3 (1.25 puntos).

Si $x[n] = a^{n!}$ Con $|a| < 1$ calcule la Transformada de Fourier de $x[n]$ (1 punto). Determine si existirá algún fenómeno de convergencia en el cálculo de dicha transformada (0.25 puntos).

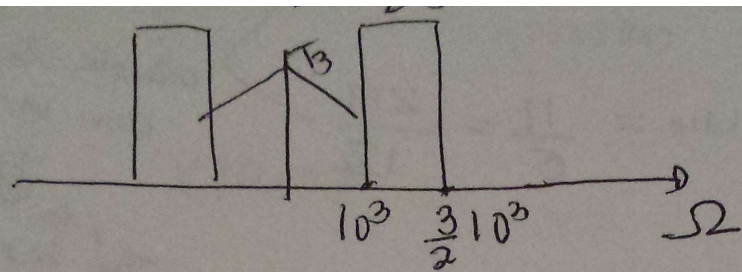
FÓRMULAS ÚTILES

$$\sum_{n=0}^M 1 \quad \xrightarrow{TF} \quad \frac{\text{sen}[\omega(M+1)/2]}{e^{-j\omega M/2}}$$

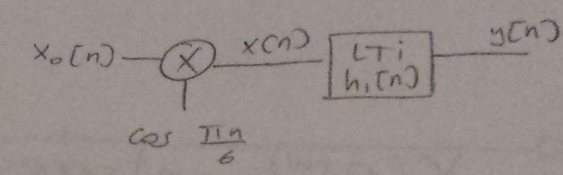


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



PROBLEMA 2



① $h_1[n]$ es la salida del sistema cuando $x[n] = \delta[n]$.

Utilizando la expresión que caracteriza al sistema tenemos:

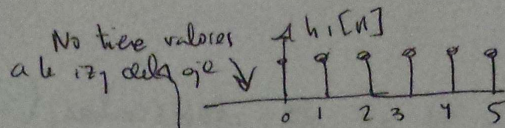
$$h_1[n] = \sum_{k=0}^{K=5} \delta[n-k] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4] + \delta[n-5]$$

↓ Gráficamente



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



2) Como $h_1[n] = 0 \forall n > 0$ el sistema es causal.
 $h(n)$ causal y estable \Rightarrow

3) Determinar si $h_1(n)$ presentará algún tipo de simetría (interna).
 $h_1[n]$ es real $\Rightarrow H_1(\omega)$ tendrá simetría conjugada

$$H_1(\omega) = H_1^*(\omega)$$

porque $h_1[n]$ y $H_1(\omega)$ son un par transformado.

4) Para que una exponencial discreta $e^{j\omega_0 n}$ sea periódica, se tiene que cumplir que $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$, con m y N enteros.

En este caso $\omega_0 = \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{12}$

cumple la condición con $m=1, N=12$

\Downarrow
 Si es periódica.
 (Además tiene período 12)

5) Para obtener $Y(e^{j\omega})$, mostraremos la evolución de los espectros de la señal a su paso por el sistema.

$X_0(e^{j\omega})$

espectro de la entrada $e^{j\frac{\pi n}{6}}$

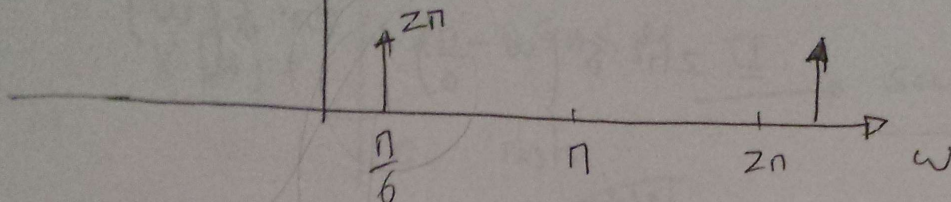
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

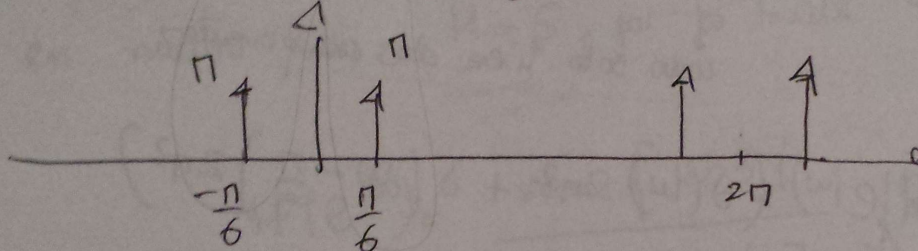
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Al multiplicar por un coseno en el tiempo, tenemos una convolución en frecuencia

$X_0(e^{j\omega})$

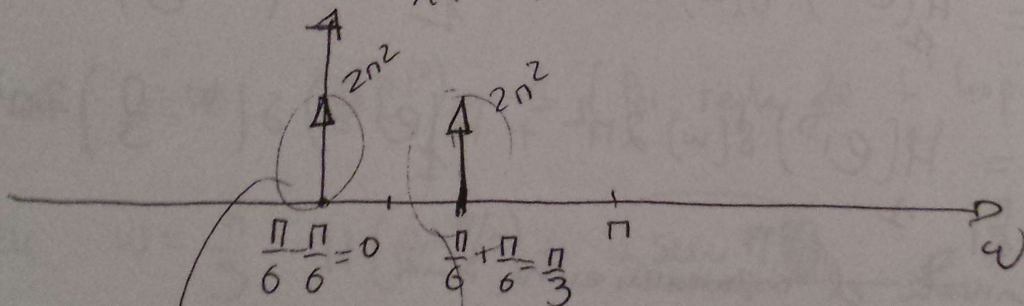


$X_{cos}(e^{j\omega})$



↓ convolucionar con deltas de Dirac equivale a desplazar el señal.

$X(e^{j\omega})$



$\frac{\pi}{6}$ desplazado

$\frac{\pi}{6}$ hacia la izquierda

$\frac{\pi}{6}$ desplazado $\frac{\pi}{6}$ hacia la derecha

(Análisismente serie

periódica

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\begin{aligned}
 X_0(e^{i\omega}) * X_{\text{rotor}}(e^{i\omega}) &= 2\pi \cdot \pi \delta\left(\omega - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) + \\
 &= 2\pi \cdot \pi \delta\left(\omega - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \\
 &= 2\pi^2 \delta\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi^2 \delta(\omega)
 \end{aligned}$$

$$Y(e^{i\omega}) = H_1(e^{i\omega}) \cdot X(e^{i\omega})$$

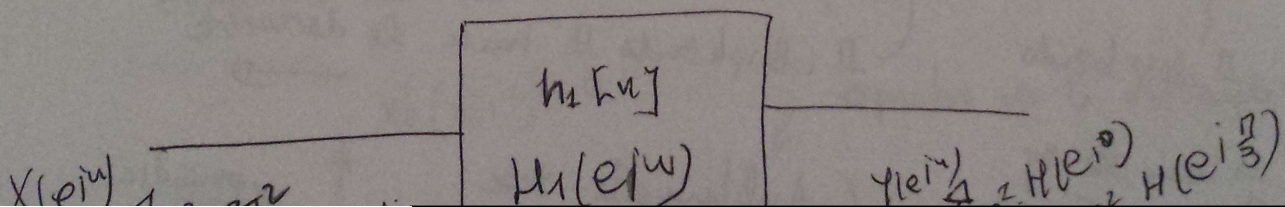
como solo tiene dos componentes

$$= H_1(e^{i\omega}) \left(\delta(\omega) 2\pi^2 + \delta\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right) 2\pi^2 \right)$$

$$= H_1(e^{i\omega}) \cdot \delta(\omega) \cdot 2\pi^2 + H_1(e^{i\omega}) \cdot \delta\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right) 2\pi^2$$

$$= H_1(e^{i0}) \delta(\omega) 2\pi^2 + H_1\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \delta\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right) 2\pi^2$$

gráficamente el razonamiento sería:



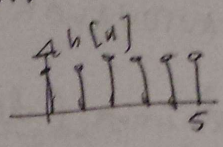
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Para obtener $H(e^{i0})$ y $H(e^{i\pi/3})$ obtenemos $H(e^{i\omega})$ utilizando la transformada que se nos proporciona al final

$$X[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \xrightarrow{\text{TF}} \frac{\text{sen}[\omega(M+1)/2]}{\text{sen}(\omega/2)} e^{-i\omega M/2}$$



en nuestro caso $M=5$, por lo tanto
número de muestras

$$H(e^{i\omega}) = \frac{\text{sen}[\omega 3]}{\text{sen}[\omega/2]} e^{-i\omega 2.5}$$

en $\omega=0$ $H(e^{i0}) = 1$ (por regla de l'hopital)

$$\text{en } \omega = \frac{\pi}{3} \quad H(e^{i\pi/3}) = \frac{\text{sen } \pi}{\text{sen } \pi/6} e^{i\pi/3 \cdot 2.5} = \frac{0}{\text{sen } \pi/6} = 0$$

Por lo tanto, la salida del sistema, en el dominio de



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

⑥ Recordamos que las exponenciales complejas son autofunciones de los sistemas LTI, por lo que si el nuestro lo fuera, la salida para la entrada $e^{i\frac{\pi}{6}n}$ debería ser $e^{i\frac{\pi}{6}n} \times \text{AUTOVALOR}$. Observamos que no lo es en el apartado anterior (de hecho $y[n]$ es una única componente coseno), por lo que se puede afirmar que el sistema global no es LTI

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

PROBLEMA 3

$$x[n] = a^{|n|} = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ \bar{a}^{-n} & n < 0 \end{cases}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\omega k} = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} \bar{a}^{-k} e^{-j\omega k}}_{X_1(e^{j\omega})} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a^k e^{-j\omega k}}_{X_2(e^{j\omega})}$$

Resuelva cada parte por separado

$$X_1(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{k'+1} e^{j\omega(k'+1)} = ae^{j\omega} \sum_{k=0}^{\infty} a^k e^{j\omega k} =$$

Cambio de variable $k' = -k - 1$
 $\Rightarrow k = k' + 1$

$$ae^{j\omega} \sum_{k=0}^{\infty} (ae^{j\omega})^k = ae^{j\omega} \frac{1}{1 - ae^{j\omega}} = \frac{ae^{j\omega}}{1 - ae^{j\omega}}$$

Suma geométrica

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

(18) $1 - ae^{j\omega}$ $1 - ae^{j\omega}$