

COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Septiembre. Modelo A

INSTRUCCIONES: Lea atentamente los enunciados. Conteste a las preguntas cortas exclusivamente en el espacio disponible a continuación del enunciado. Desarrolle la solución a los ejercicios 5 y 6 en otra hoja de examen, en el espacio que necesite. Se permite el uso de calculadora no programable, si la calculadora no tiene más de dos líneas de salida.

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 PUNTO) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la función definida como

$$f(x, y) = (x - y^2, x^2 - y).$$

¿Tiene inversa local diferenciable en un entorno de $(0, 1)$?

Solución:

2. (1 PUNTO) Sea C la curva dada por la intersección de las superficies $z = x^2 + y$ y $x - z = 2$. Determine la ecuación de su plano osculador en el punto $(4, 0, 2)$.

Solución:

3. (1 PUNTO) Sea C una curva parametrizada por la longitud de arco y ecuación dada por $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(u(s), v(s))$, que está contenida en una superficie. Sea $\mathbf{k}(s)$ el vector curvatura de la curva. Defina, a partir de él, vector curvatura normal $\mathbf{k}_n(s)$ y vector curvatura geodésica $\mathbf{k}_g(s)$.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Solución (continuación):

4. (1 PUNTO) Considere el toro dado por la siguiente ecuación paramétrica.

$$\mathbf{x}(u, v) = ((\cos u + 2) \cos v, (\cos u + 2) \sin v, \sin u).$$

Clasifique el punto $(2, 0, 1) = \mathbf{x}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Solución:

EJERCICIOS

5. (3 PUNTOS) Sea C la curva dada por la ecuación paramétrica:

$$\mathbf{x}(t) = 2e^t(\cos t, \sin t),$$

para $t \in \mathbb{R}$. Es una espiral logarítmica.

- Obtenga la longitud de arco partiendo de $t = 0$.
- Parametrice por la longitud de arco.
- Obtenga la curvatura en el punto $\mathbf{x}(0)$.

Nota: Cada apartado vale 1 punto.

6. (3 PUNTOS) Sea C la curva de Bézier cuyo polígono de control es $(0, 1, 1)$, $(1, 2, 0)$, $(1, 0, 2)$, $(0, -1, 2)$.

The logo for Cartagena99 features the word 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue background with a white arrow pointing to the right, and a yellow and orange gradient bar at the bottom.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Curvas

Curvas en el plano no parametrizada por la longitud de arco:

$$k(t) = \det \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \right) \right) \frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3}.$$

Curva en el plano definida por ecuaciones implícitas:

$$k(x, y) = \frac{(-f_y, f_x) H(f) (-f_y, f_x)^t}{\|\nabla f\|^3}.$$

Curvas en el espacio:

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3},$$
$$\tau(t) = -\frac{\det(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t))}{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|^2}.$$

Superficies

Formas fundamentales:

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v.$$
$$e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu}, \quad f = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv}, \quad g = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv}.$$

Curvaturas:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$
$$H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}.$$

Ecuación de las curvaturas principales:

$$k^2 (EG - F^2) - (Eg - 2Ff + Ge)k - f^2 + eg = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas de curvatura:

$$(eF - fE)(du)^2 + (eG - gE)dudv + (fG - gF)(dv)^2 = 0.$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a white shadow effect, and a blue arrow-like shape points to the right behind the text.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70