COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Febrero. Modelo A

INSTRUCCIONES: Lea atentamente los enunciados. Conteste a las preguntas cortas exclusivamente en el espacio disponible a continuación del enunciado. Desarrolle la solución a los ejercicios 5 y 6 en otra hoja de examen, en el espacio que necesite.

Se permite el uso de calculadora no programable, si la calculadora no tiene más de dos líneas de salida.

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 PUNTO) Considere la transformación afín en el plano $f(x) = Ax + b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 30 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

Pruebe que f es una isometría.

Solución:

2. (1 PUNTO) Defina polinomios de Bernstein.

Solución:

3. (1 PUNTO) Sea C una curva (llamada de Viviani) dada por la ecuación paramétrica

$$\mathbf{x}(t) = \left(1 + \cos t, \operatorname{sen} t, 2\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right).$$

Calcule el vector binormal en el punto $\mathbf{x}(0)$.

Solución:

Solución (continuación):

4. (1 PUNTO) Sea $\mathbf{x}(u, v)$, para $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ una parametrización de una superficie. Defina punto regular de la superficie y explique qué significa que una parametrización es regular.

Solución:

EJERCICIOS

5. (3 PUNTOS) Sea C la la curva dada por

$$\mathbf{x}(t) = \left(t^5 - t, t^3 - t, t^2 - 1\right).$$

para $t \in [-2, 2]$.

a) Estudie si es una curva regular y si $(0, 0, 0)$ es un punto múltiple.

b) Determine la función curvatura. Escriba qué condición deben cumplir los puntos de esta curva para que sean puntos de inflexión. No es necesario hacer todos los cálculos, pero sí indicar todas las operaciones y todos los pasos.

c) Calcule las ecuaciones de las rectas tangente y normal que pasan por $\mathbf{x}(0)$.

Nota: Cada apartado vale 1 punto.

6. (3 PUNTOS) 3 PUNTOS) Sea S la superficie dada por

$$z = x^2 + y^2.$$

a) Determine los coeficientes de la primera forma fundamental.

b) Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental. Clasifique los puntos de la superficie.

c) Determine la curvatura de Gauss y la curvatura media de la superficie en el punto $(1, 0, 1)$.

Nota: Cada apartado vale 1 punto.

Formulario

Curvas

Curvas en el plano no parametrizada por la longitud de arco:

$$k\left(t\right)=\det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt},\left(\frac{d^{2}\mathbf{x}}{dt^{2}}\right)\right)\frac{1}{\left\Vert d\mathbf{x}/dt\right\Vert ^{3}}.$$

Curva en el plano definida por ecuaciones implícitas:

$$k\left(x,y\right)=\frac{\left(-f_{y},f_{x}\right)H\left(f\right)\left(-f_{y},f_{x}\right)^{t}}{\left\Vert \nabla f\right\Vert ^{3}}.$$

Curvas en el espacio:

$$\begin{aligned}
k\left(t\right) & =\frac{\left\Vert \mathbf{x}'\left(t\right)\times\mathbf{x}''\left(t\right)\right\Vert }{\left\Vert \mathbf{x}'\left(t\right)\right\Vert ^{3}},\\
\tau\left(t\right) & =-\frac{\det\left(\mathbf{x}'\left(t\right),\mathbf{x}''\left(t\right),\mathbf{x}'''\left(t\right)\right)}{\left\Vert \mathbf{x}'\left(t\right)\times\mathbf{x}''\left(t\right)\right\Vert ^{2}}.
\end{aligned}$$

Superficies

Formas fundamentales:

$$\begin{array}{lll}
E=\mathbf{x}_{u}\cdot\mathbf{x}_{u}, & F=\mathbf{x}_{u}\cdot\mathbf{x}_{v}, & G=\mathbf{x}_{v}\cdot\mathbf{x}_{v}.\\
e=\mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{uu}, & f=\mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{uv}, & g=\mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{vv}.
\end{array}$$

Curvaturas:

$$\begin{aligned}
K & =\frac{eg-f^{2}}{EG-F^{2}},\\
H & =\frac{Eg-2Ff+Ge}{2\left(EG-F^{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Ecuación de las direcciones principales:

$$k^{2}\left(EG-F^{2}\right)-\left(Eg-2Ff+Ge\right)k-f^{2}+eg=0.$$

Ecuación diferencial de las líneas de curvatura:

$$\left(eF-fE\right)\left(du\right)^{2}+\left(eG-gE\right)dudv+\left(fG-gF\right)\left(dv\right)^{2}=0.$$

Ecuación diferencial de las líneas asintóticas:

$$e\left(du\right)^{2}+2fdudv+g\left(dv\right)^{2}=0.$$