CALCULO DIFERENCIAL (MATEMATICAS II)

EXAMEN FINAL SEPTIEMBRE DE 2013

PARTE TEORICA

1. (**10 puntos**) En cada una de las siguientes afirmaciones, sustituir ...... por la expresión que corresponda.

(a) Si $z = e^{i\frac{\pi}{6}}$, entonces $\overline{z} = \ldots\ldots + i \ldots\ldots$.

(b) Si $z_1 = 4\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ y $z_2 = 3\, e^{i\frac{\pi}{3}}$, entonces $z_1 z_2 = \ldots\ldots$ y $\frac{z_1}{z_2} = \ldots\ldots$.

(c) Si z es número complejo tal que $z^3 = 2 + 2i$, entonces $|z| = \ldots\ldots$ y uno de sus posibles argumentos es ......

2. Sea $f : (-3, 3) \to \mathbb{R}$ una función 2 veces derivable en $(-3, 3)$ tal que

$$f(-1) = f(1) = 2, \quad f''(x) > 0 \text{ para todo } x \in (-3, 3).$$

(a) (**10 puntos**) Decir cuales de las siguientes afirmaciones son ciertas.

(a.1) f' tiene exactamente una raíz en $(-3, 3)$.

(a.2) Si f tiene un extremo relativo en $(-3, 3)$, necesariamente ese extremo es un máximo relativo.

(a.3) f no tiene raices en $(-3, 3)$.

(a.4) f tiene a lo máximo dos raices en $(-3, 3)$.

(b) (**10 puntos**) Elegir una de las afirmaciones en la que la respuesta es negativa y dar un ejemplo que muestre que dicha afirmación en efecto es falsa.

3. (**10 puntos**) Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie de potencias tal que $\lim_n |a_n| = 1$. Consideremos las siguientes afirmaciones.

(a) El radio de convergencia de la serie es 1.

(b) El radio de convergencia de la serie es > 1.

(c) La serie converge en $[-1, 1]$ y diverge fuera de $[-1, 1]$.

(d) La serie converge en $(-1, 1)$ y diverge fuera de $(-1, 1)$.

Elegir una afirmación cierta y probarla.

4. (**10 puntos**) Sean $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funciones tales que todas las derivadas parciales de f_1, f_2 y f_3 existen y son continuas en $\mathbb{R}^3$. Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3) &= y_1. \\ f_2(x_1, x_2, x_3) &= y_2. \\ f_3(x_1, x_2, x_3) &= y_3. \end{aligned} \tag{1}$$

Supongamos que $(1, 0, -2, 3, -1, 0)$ es una solución de (1). Decir qué condición ha de verificarse para que en las ecuaciones de (1) se pueda despejar de manera única

$(x_1, x_2, x_3) = g(y_1, y_2, y_3)$ para $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$ cerca de $(1, 0, -2, 3, -1, 0)$, siendo g derivable en (y_1, y_2, y_3). ¿Cual es la matriz jacobiana de g en dichos puntos?

NOTAS.

• La calificación de esta parte teórica será la media aritmética de las calificaciones obtenidas en cada una de las 5 preguntas de la misma.

• La calificación de este examen final será la media aritmética de las calificaciones obtenidas en su parte teórica y en su parte práctica.

CALCULO DIFERENCIAL (MATEMATICAS II)

EXAMEN FINAL SEPTIEMBRE DE 2013

PARTE PRACTICA

1. (**10 puntos**) Sea $(a_n)_n$ la sucesión en $\mathbb{R}$ definida por

$$a_n = \frac{1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} - \cdots - \frac{1}{e^n}}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Sea $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Calcular el supremo y el ínfimo de A. Razonar si son máximo y mínimo, respectivamente.

2. (**10 puntos**) Probar que la serie

$$\sum_n \frac{1 + 2\sin(nx)\, x^n}{n(n+1)}$$

converge para todo $x \in \mathbb{R}$ con $|x| \leq 1$.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x^2) - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ \ln(1+x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

(a) (**10 puntos**) Estudiar los valores de x para los que f es derivable y para los que no es derivable.

(b) (**10 puntos**) Probar que $f(x) < 0$ para todo $x < 0$.

(c) (**10 puntos**) Utilizando el polinomio de Taylor de grado 3 de f en el punto adecuado, calcular una valor aproximado de $\ln(2.001)$ con tres cifras decimales.

Ayuda. Tomar 0.693 como valor aproximado de $\ln 2$.

(d) (**10 puntos**) Hallar una cota del valor absoluto del error cometido en el cálculo aproximado realizado en (c).

4. Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ ó } y = 0\}$. Sea $f : \mathbb{R}^2 \setminus A \to \mathbb{R}^2$ la función definida por

$$f(x,y) = \left(\frac{(e^y - 1)\sin^2 x}{x^2 + y^2}, y \sin(1/x) + x\, \cos(1/y) \right) \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A).$$

(a) (**10 puntos**) Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(b) (**10 puntos**) Calcular la matriz jacobiana de f en $(1,1)$.

NOTAS.

• La calificación de esta parte práctica será la media aritmética de las calificaciones obtenidas en cada una de las 8 preguntas de la misma.

• La calificación de este examen final será la media aritmética de las calificaciones obtenidas en su parte teórica y en su parte práctica.