

# Capítulo 9

## Fluidos

### 9.1. Introducción - unidades

Veremos ahora como podemos aplicar los principios generales para el movimiento de un sistema de partículas al **movimiento de un fluido**. Consideramos en primer lugar un fluido (líquido o gas) perfecto, es decir un fluido en el que no hay fuerzas internas de fricción, no tampoco fricción del fluido con los cuerpos sólidos con las que se halla en contacto. Dicho de otro modo, ignorando la viscosidad.

Dado que la ausencia de fricción implica no hay fuerzas laterales entre las capas de fluido: esto significa que para una determinada superficie (imaginaria o no) en el fluido, la fuerza que ejerce el fluido es siempre normal a la superficie. Llamaremos **presión** a la fuerza ejercida por el fluido sobre la unidad de superficie,  $P = F/S$ . Las dimensiones de la presión son

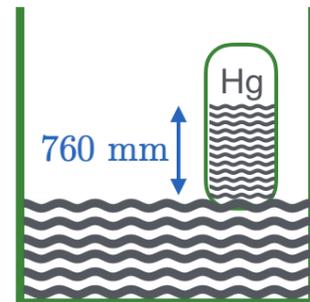
$$[P] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2} = \frac{[E]}{[V]}. \quad (9.1)$$

Es decir, la presión tiene unidades de fuerza por unidad de superficie o de energía por unidad de volumen. La unidad de presión en el sistema internacional es el **Pascal**

$$1 \text{ Pa} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} = \text{J} \cdot \text{m}^{-3} = \text{N} \cdot \text{m}^{-2}. \quad (9.2)$$

Otras unidades son 1 bar =  $10^5$  Pa y 1 mbar =  $10^3$  Pa. otra unidad es el Torr o mm de Hg (mercur), que es la presión que ejerce por su peso una columna de 1 mm de Hg.

$$\begin{aligned} 1 \text{ Torr} &= \rho_{\text{Hg}} g \times 10^{-3} \\ &= (13,6 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3})(9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})(10^{-3} \text{ m}) = 133,32 \text{ Pa}. \end{aligned}$$



Cartagena99

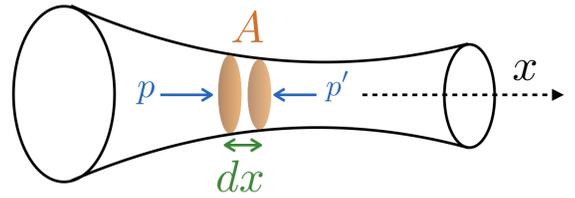
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## 9.2. Movimiento de un fluido - Teorema de Bernoulli

En un fluido ideal, consideramos las **líneas de corriente** que son las trayectorias que siguen las partículas de fluidos y tubos de corriente, formantes por un haz de línea de corriente.



Tomando ahora un tubo de corriente con eje paralelo al eje  $x$ , y consideramos una rodaja de fluido de área  $A$  y espesor  $dx$ . La masa de la rodaja es  $dm = \rho A dx$ , donde  $\rho$  es la densidad del fluido.

Ahora si  $p$  y  $p'$  son las presiones ejercidas por el fluido a izquierda y derecha de la rodaja, la fuerza interna ejercida por el fluido sobre la rodaja es

$$dF_x = -p'A + pA = -(p' - p)A = -(p + dp - p)A = -(dp)A = -\frac{dp}{dx}(Adx) \quad (9.4)$$

Dado que  $Adx$  es el volumen de la rodaja, la fuerza interna por unidad de volumen que ejerce el fluido sobre la rodaja es

$$f_p = -\frac{dp}{dx}. \quad (9.5)$$

En general  $\vec{f}_p = -\vec{\nabla}p$ . Por el momento consideramos la presión del fluido como la única fuente de fuerza. La ecuación de movimiento para la rodaja es

$$dm \frac{dv}{dt} = dF_x \quad \text{o sea} \quad \rho A dx \frac{dv}{dt} = -A \frac{dp}{dx} dx \quad (9.6)$$

donde  $v$  es la velocidad del centro de masa de la rodaja. Cancelando el factor común  $A dx$  obtenemos

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{dp}{dx}, \quad (9.7)$$

Para seguir avanzando en el análisis vamos a ver ahora algo mas específico y vamos a considerar un **fluido estacionario**, esto significa que aunque la velocidad de un elemento de fluido puede cambiar cuando el fluido cambia de posición, la velocidad del fluido en un punto dado del espacio es siempre la misma, es decir **el campo de velocidades del fluido depende de la posición pero no del tiempo**. Entonces en el caso de un movimiento estacionario si  $dt$  es el tiempo requerido por un elemento de fluido para recorrer la distancia  $dx$ , podemos escribir

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{dv}{dx} = v \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx}(v^2) \quad (9.8)$$

que substituyendo en (9.7) nos da

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

La ecuación (9.10) expresa la conservación de energía por volumen de un fluido incompresible. También (9.10) nos dice que el cambio de energía cinética es equivalente a el trabajo de las fuerzas. Si además de la presión del fluido consideramos un cambio de altura, es decir un cambio de energía gravitatoria, tenemos que añadir este cambio de energía (por volumen) a la relación (9.10). Obtenemos

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho gh = \text{constante.} \quad (9.11)$$

Este resultado es conocido como teorema de Bernoulli, y es la ecuación fundamental para el movimiento de un fluido estacionario y incompresible. (9.11) expresa la conservación de la energía, en energía por unidad de volumen:  $(1/2)\rho v^2$  es la energía cinética,  $p$  es la energía potencial interna y  $\rho gh$  la energía potencial externa.

Además del teorema de Bernoulli que expresa la conservación de la energía, tenemos otra ecuación fundamental en el movimiento de un fluido que exprese la conservación de la masa, y que es la **ecuación de continuidad** de Vinci.

Consideremos un tubo de corriente de un fluido bajo condiciones estacionarias de forma que no se añade ni se pierde masa en ningún punto, es decir no hay fuente ni sumideros. Sean  $A_1$  y  $A_2$  dos secciones del tubo. El volumen entre la secciones  $A_1$  y  $A_2$  es constante. El volumen de fluido que pasa por  $A_1$  en la unidad de tiempo es al que contiene un cilindro de base  $A_1$  y altura  $v_1$  y es igual a  $A_1 v_1$ . Por tanto la masa de fluido que pasa por  $A_1$  en unidad de tiempo es  $A_1 v_1 \rho_1$ . Análogamente  $\rho_2 A_2 v_2$  es la cantidad de fluido que pasa por  $A_2$  en la unidad de tiempo. Entonces la conservación de la masa requiere que

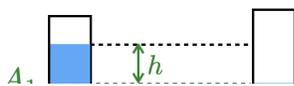
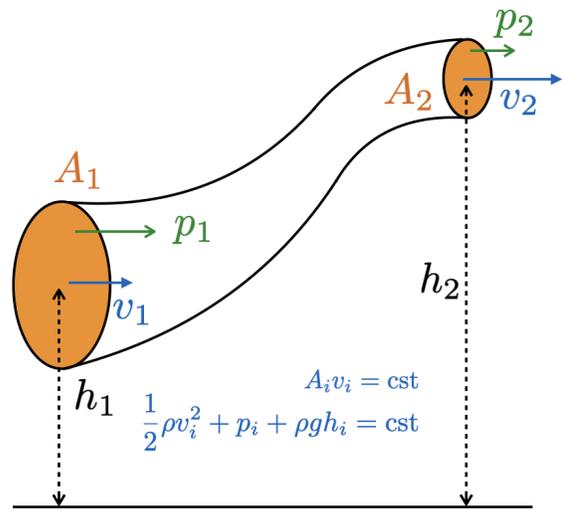
$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \quad (9.12)$$

que es la ecuación de continuidad. Si el fluido es incompresible,  $\rho_1 = \rho_2$  y se tiene

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (9.13)$$

que nos dice que la velocidad del fluido es inversamente proporcional a la sección de fluido.

Vemos algunos ejemplos. Consideremos un **medidor Venturi**, que sirve para medir la velocidad de un fluido. La medida de la altura del fluido en am-



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$  (9.10)

y por otra parte la ecuación de continuidad nos da  $A_1v_1 = A_2v_2$  que substituyamos en (9.15) para obtener

$$2(p_1 - p_2) = \rho(v_2^2 - v_1^2) = \rho v_1^2 \left( \frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right). \quad (9.16)$$

Entonces

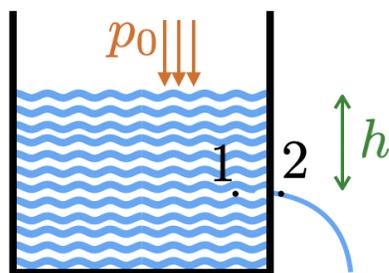
$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left( \frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right)}} = A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho (A_1^2 - A_2^2)}}, \quad (9.17)$$

que nos permite de calcular la velocidad  $v_1$  conociendo la diferencia de presión, la densidad del fluido y la relación entre secciones. Además de la ecuación de continuidad  $A_1v_1 = A_2v_2$  podemos también calcular  $v_2$ .

La cantidad de fluido que pasa a través de cualquier sección de tubo por unidad de tiempo que se llama **flujo o gasto** es

$$Q = A_1v_1 = A_2A_1 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho (A_1^2 - A_2^2)}} = K \sqrt{p_1 - p_2} \quad (9.18)$$

donde  $K$  es una constante que depende de las características del fluido y del tubo.



Como otro aplicación consideramos la velocidad de salida de un líquido por un orificio practicado en el tanque que lo contiene. Aplicando el teorema de Bernoulli a los puntos 1 y 2 situados a la misma altura del orificio dentro y fuera del tanque, tenemos

$$p_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v^2 \quad \text{Ahora} \quad p_1 = p_0 + \rho gh \quad \text{y} \quad p_2 = p_0. \quad (9.19)$$

Donde  $p_0$  es la presión atmosférica ambiente. La relación  $p_1 = p_0 + \rho gh$  se obtiene notando que el fluido en el tanque está en el reposo. Se sigue por tanto que

$$p_0 + \rho gh = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 \quad \text{o sea} \quad v = \sqrt{2gh} \quad (9.20)$$

de modo que la velocidad de salida del líquido por el orificio es la misma que adquiriría un cuerpo cayere libremente desde la superficie libre del líquido hasta el orificio. Este resultado se conoce como **teorema de Torricelli**.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

1 + 2^{P-1} + 2^{P-2} + \dots + 2^0 = 2^P - 1

de modo que  $v_1 > v_2$  implica  $p_1 < p_2$ . Se produce por tanto una sobre presión debajo del ala que sustente el avión. Si  $A$  es la área del ala del avión, la fuerza hacia arriba es

$$F = A(p_2 - p_1) = \frac{1}{2}\rho A(v_1^2 - v_2^2) \quad (9.22)$$

y también factorizando  $v_1^2 - v_2^2 = (v_1 + v_2)(v_1 - v_2)$  y teniendo en cuenta que  $v = (1/2)(v_1 + v_2)$  es aproximadamente la velocidad del avión con respecto al aire, obtenemos que la fuerza o empuje hacia arriba en función de la velocidad del avión es

$$F = A\rho v(v_2 - v_1). \quad (9.23)$$

Cuando la velocidad del avión es suficiente para proporcionar una fuerza igual al peso del avión, se alcanza de sustentación. La vela de un velero navegando, actúa con arreglo al mismo principio físico.

### 9.3. Fluidos en reposo - Hidrostática

Como un caso particular del teorema de Bernoulli podemos estudiar el caso de un fluido incompresible en reposo, es decir la hidrostática. Eliminando los términos de velocidad en el teorema de Bernoulli, tenemos

$$p_1 + \rho gh_1 = p_2 + \rho gh_2 \quad (9.24)$$

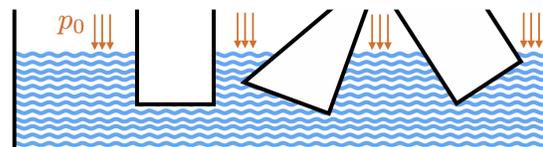
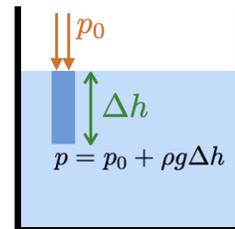
donde  $p_1$  y  $p_2$  son las presiones de fluido en punto situados a altura  $h_1$  y  $h_2$  respectivamente. La ecuación (9.24) es la ecuación fundamental de la hidrostática y contiene en particular el **principio de Pascal**, que dice que todos los puntos situados en un mismo plano horizontal están a la misma presión, y en particular la superficie libre (a presión atmosférica) de un líquido define la horizontalidad.

La ecuación (9.24) nos dice que la presión en un punto  $P$  de un líquido en reposo es igual a la presión en la superficie libre  $p_0$  más la presión debido al peso de la columna de líquido de altura  $z$  sobre dicho punto, es decir

$$p = p_0 + \rho gz. \quad (9.25)$$

Notemos que el peso de una columna de líquido de sección  $A$  y altura  $z$  es  $\rho Azg$ , de modo que la presión que ejerce es  $\rho Azg/A = \rho gz$ .

Del principio de Pascal se sigue que si tenemos un líquido que ocupe diferentes vasijas comunicantes entre ellos, pero de distinta forma, dicho líquido homogéneo alcanza en todas las vasijas la misma altura.



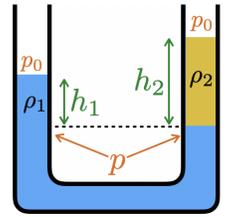
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

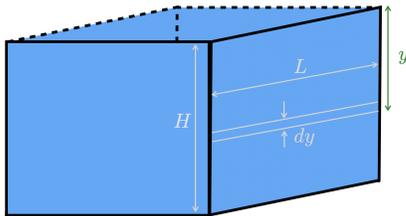
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Otro ejemplo clásico de hidrostática son los vasos comunicante. Si las dos vacuas contienen el mismo liquido, cuyas alcanzan la misma altura. Pero si contiene líquidos no miscibles con densidad diferente  $\rho_1 > \rho_2$ , ambos líquidos alcanzan (de acuerdo con el principio de Pascal) alturas diferentes  $h_1 < h_2$  relacionados entre ellos en la forma



$$p_1 = p_0 + \rho_1 g h_1 = p_0 + \rho_2 g h_2 \quad (9.27)$$

$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 \quad \rightarrow \quad \frac{h_2}{h_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (9.28)$$



Como otro ejemplo calculamos la fuerza total sobre la pared de un estanque. La presión a  $y = 0$  es la presión atmosférica  $p_0 = 1 \text{ atm}$ . A una distancia  $y$  por debajo de la superficie, tenemos  $p(y) = p_0 + \rho g y$ . tenemos que la fuerza sobre un franje de espesor  $dy$  a profundidad  $y$  es

$$dF = p(y)Ldy = p_0 Ldy + \rho g y Ldy \quad (9.29)$$

La fuerza total será

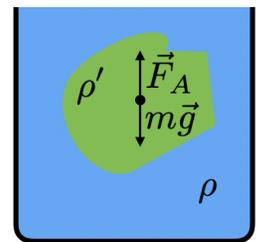
$$F = \int_0^H dF = p_0 LH + \rho g L \frac{H^2}{2} \quad (9.30)$$

El termino  $p_0 LH$  representa la fuerza débito a la presión atmosférica sobre la pared de área  $LH$  y el termino  $\rho g LH^2/2$  es débito a el peso del agua.

## 9.4. Principio de Arquímedes

Otro tema clásico de la hidrostática es el principio de Arquímedes. En el seno de un fluido en equilibrio aislamos mentalmente mediante una superficie cerrada  $S$  una porción de masa  $M = \rho V$  de ese fluido donde  $V$  es el volumen encerrado por la superficie  $S$ , y  $\rho$  la densidad del fluido.

Para que la masa  $M$  de fluido se encuentre en equilibrio (en reposo), la resultante de todas las fuerzas que ejerce el resto del fluido sobre ella, como presión a través de la superficie  $S$ , debe ser igual al peso de la masa  $M$  de fluido  $Mg = \rho Vg$ . Si ahora substituímos la masa  $M$  de fluido por otro cuerpo con la misma forma y masa  $M'$ , la resultante de todas las



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

si  $\rho' < \rho$  el cuerpo nota.

## 9.5. Ecuación barométrica

Para un fluido compresible, como por ejemplo un gas, la variación de la presión con la altura, sigue una ley diferente de la ley hidrostática. Por ejemplo si tenemos un gas en equilibrio térmico, tenemos que la variación de la presión en la altura  $dz$  está dado por

$$dp = -\rho g dz \quad (9.32)$$

donde la densidad está dada por la ecuación de los gases perfectos  $pV = nRT$ . Si  $M$  es la masa molecular del gas, tenemos

$$nM = \rho V \quad \text{o bien} \quad \frac{n}{V} = \frac{\rho}{M}, \quad (9.33)$$

que substituímos en la ecuación de los gases perfectos nos da

$$p = \frac{\rho RT}{M} \quad \rightarrow \quad \rho = \frac{pM}{RT}. \quad (9.34)$$

que substituímos en (9.32) nos da

$$dp = -\frac{pM}{RT} g dz \quad \text{o bien} \quad \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dz \quad (9.35)$$

que integrando desde una altura que tomamos como  $z = 0$  con una presión  $p_0$ , nos da

$$\int_0^z \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} \int_0^z dz \quad \text{o sea} \quad p = p_0 e^{-\frac{Mg}{RT} z}. \quad (9.36)$$

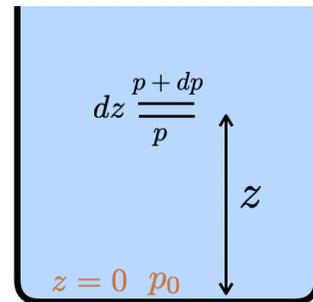
La expresión (9.36) nos da la variación de la presión con la altura, y se llama **ecuación barométrica**, y se puede utilizar para estudiar la variación de la presión atmosférica con la altura  $z$ . Si bien habría que corregirla porque la temperatura varía con la altura. Para alturas pequeñas tenemos

$$p \simeq p_0 \left( 1 - \frac{Mg}{RT} z + \dots \right) = p_0 - \frac{Mg}{RT} p_0 z + \dots = p_0 - \rho g h. \quad (9.37)$$

Es decir, tenemos la ecuación hidrostática válida para alturas pequeñas.

## 9.6. Viscosidad

El rozamiento entre las capas de un fluido recibe el nombre de **viscosidad**. Por ejemplo si tenemos dos vasos uno con agua y uno con aceite, resulta más fácil agitar el agua que el aceite.



Cartagena99

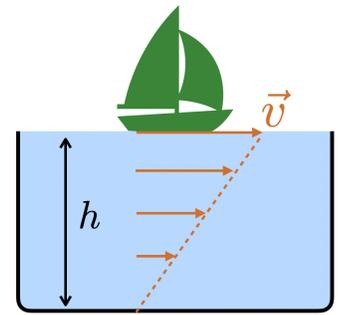
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

velocidad, hasta la capa en contacto inmediatamente con el fondo que se encuentra en reposo.

En primera aproximación podemos suponer que la fuerza  $F$  entre las capas es constante y es igual en magnitud a la fuerza  $\vec{F}_1$  que imprimimos a la lámina para iniciar el movimiento. Si consideremos la capa de liquido entre otras dos, como la capa de mas arriba se mueve hacia la derecha con respecto a la capa central, produce una fuerza hacia la derecha  $+F$ , mientras que la capa de abajo al moverse hacia la izquierda producirá sobre la capa central una fuerza igual y opuesta  $-F$ , de forma que la capa central y todas las capas de liquido se mueven con velocidad constante. Este description es correcta si el liquido no está sometido a fuerzas externas que lo hagan acelerar, es decir suponemos una situación estacionaria laminar para el liquido.



Los fluidos en régimen laminar incompresible y viscosidad constante, se llaman **fluidos Newtonianos**. Por un fluido Newtoniano, la fuerza de resistencia experimental por una placa de área  $S$  que se mueve, a velocidad constante  $v$  por la superficie de un fluido de profundidad  $h$  viene dada por

$$F = \eta S \frac{v}{h}, \quad (9.38)$$

El coeficiente de proporcionalidad  $\eta$  se llama coeficiente de viscosidad o **viscosidad del fluido**.

Por ejemplo para remolcar una gabbare con velocidad uniforme  $v$ , en un canal poco profundo, se necesitaría una fuerza dada por (9.38) donde  $\eta$  es la viscosidad del agua,  $S$  la área de la barca y  $h$  la profundidad.

Si la velocidad no varia de manera lineal, de forma experimental se compruebe que en esta situación, y en primera aproximación, la fuerza  $F$  es proporcional al gradiente de velocidad  $dv/dz$  y a la superficie de contacto  $S$  entre las capas de liquido en contacto, es decir

$$F = \eta S \frac{dv}{dz}. \quad (9.39)$$

Las dimensiones de  $\eta$  son

$$[\eta] = \frac{[F]}{[S] \left[ \frac{dv}{dz} \right]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2 LT^{-1} L^{-1}} = ML^{-1}T^{-1}. \quad (9.40)$$

La unidad internacional de viscosidad es  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . También como  $[\eta] = [p]T$  se tiene  $1 \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s}) = 1 \text{ Pa} \cdot \text{s} = 1 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ . Es mas usual que la unidad internacional, usar la unidad cgs llamado poise.  $1 \text{ poise} = 1 \text{ g} / 1 \text{ cm} / 1 \text{ s} = 10^{-3} \text{ kg} / 10^{-2} \text{ m} / 1 \text{ s} = 10^{-1} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ . Es decir  $1 \text{ Pa} \cdot \text{s} = 10 \text{ poise}$ .

A veces se define la viscosidad cinemática  $\eta/\rho$ , con dimensiones

$$[\eta] = \frac{ML^{-1}T^{-1}}{\rho}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

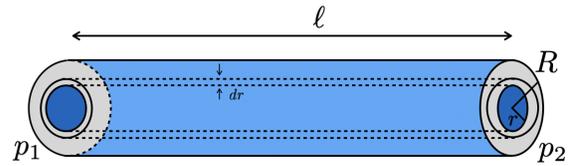
---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

## 9.7. Formula de Poiseuille

Consideremos un tramo de longitud  $\ell$  de una tubería de radio  $R$  que transporte un líquido en régimen estacionario. En las secciones  $A_1$  y  $A_2$  que limitan el tramo, tenemos presiones  $p_1$  y  $p_2$  con  $p_1 > p_2$ , de forma que la diferencia de presión produzca la fuerza necesaria para vencer la fricción viscosa del fluido. Este pérdida de presión en una tubería por efecto de la viscosidad se llama **pérdida de carga** en la tubería. Si consideramos ahora un tubo de radio  $r < R$ , sobre esta tubo actúa la fuerza debida al gradiente de presión  $F_1 = (p_1 - p_2)\pi r^2$ , y la fuerza de fricción viscosa producida por la capa en forma de corona cilíndrica entre  $r$  y  $r + dr$ . De acuerdo con (9.39) este fuerza viscosa que frena el fluido es



$$F_2 = \eta(2\pi r\ell) \frac{dv}{dr}. \quad (9.42)$$

Para que el movimiento del fluido sea estacionario, las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  deben compensarse. Entonces

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 + 2\pi r\ell\eta \frac{dv}{dr} = 0, \quad (9.43)$$

donde podemos obtener una expresión para  $dv/dr$ :

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{(p_1 - p_2)\pi r^2}{2\pi r\ell\eta} = -\frac{(p_1 - p_2)r}{2\eta\ell} \quad (9.44)$$

Ahora asumiendo que la velocidad del fluido junto a las paredes de la tubería es nula, es decir  $v(R) = 0$ . Integrando (9.44) con esta condición, obtenemos

$$v(r) = v(R) + \int_R^r \frac{dv}{dr} dr = -\int_R^r \frac{p_1 - p_2}{2\eta\ell} r dr = \frac{p_1 - p_2}{2\eta\ell} \int_r^R r dr = \frac{p_1 - p_2}{4\eta\ell} (R^2 - r^2). \quad (9.45)$$

que nos da la velocidad de las capas de fluido en función de la distancia  $r$  el eje de la tubería. A partir de (9.45) podemos calcular el flujo, gasto o volumen de fluido por unidad de tiempo que transporte la tubería:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^R 2\pi r v(r) dr \\ &= 2\pi \int_0^R \frac{p_1 - p_2}{4\eta\ell} (R^2 - r^2) r dr = \frac{\pi}{2\eta\ell} (p_1 - p_2) \left[ R^2 \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4} \right] = \frac{\pi R^4}{8\eta\ell} (p_1 - p_2). \end{aligned} \quad (9.46)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## 9.8. Viscosímetro de Ostwald

Consiste en un bulbo que se continua en un tubo capilar. Se rellena en bulbo con un líquido y se mide el tiempo que tarde la superficie del líquido en pasar de la marca  $A$  a la marca  $B$ . Si tenemos dos líquidos con densidades  $\rho_1$  y  $\rho_2$  que tardan tiempos  $t_1$  y  $t_2$  en pasar de la marca  $a$  a la marca  $b$ , y si  $V$  es el volumen entre ambas marcas de acuerdo con la ley de Poiseuille tenemos

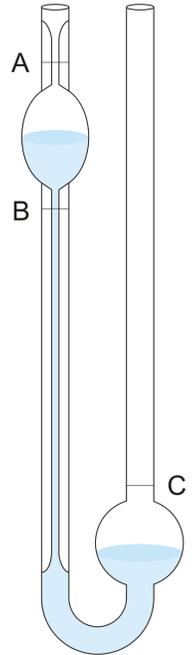
$$V = \frac{\pi R^4}{8\eta_1 \ell} (\Delta p)_1 t_1 = \frac{\pi R^4}{8\eta_2 \ell} (\Delta p)_2 t_2 \quad (9.47)$$

Como la diferencia de altura entre ambos bulbos es la misma para los dos líquidos, las diferencias de presiones  $(\Delta p)_1$  y  $(\Delta p)_2$  son proporcionales a las densidades de los líquidos  $\rho_1$  y  $\rho_2$ . Por tanto de (9.47)

$$\frac{\rho_1}{\eta_1} t_1 = \frac{\rho_2}{\eta_2} t_2 \quad \text{de donde} \quad \frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\rho_1 t_1}{\rho_2 t_2} \quad (9.48)$$

que nos permite determinar la viscosidad  $\eta_2$  del líquido 2 conociendo la viscosidad del líquido de referencia  $\eta_1$  y las densidades de ambos líquidos.

La figura del viscosímetro de Ostwald viene de E. Generalic.<sup>[1]</sup>



## 9.9. Movimiento de un sólido en un fluido

Terminamos esta capítulo de introducción a los fluidos con un par de ejemplos sobre el movimiento de un sólido en el seno de un fluido.

Consideramos en primer lugar la caída de un esfera de radio  $R$  y densidad  $\rho$  en fluido menos denso  $\rho' < \rho$ . Calculamos la velocidad límite de caída. La fuerza de fricción debido a la viscosidad del fluido es

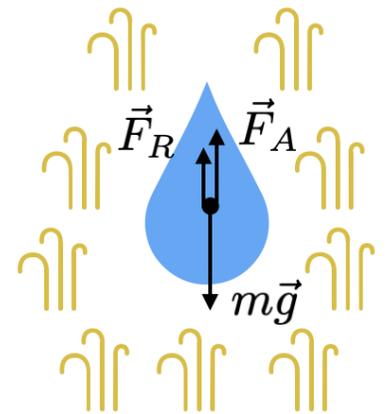
$$F_R = 6\pi\eta v_\infty R. \quad (9.49)$$

Esta relación fue derivada por Stokes en 1851. Se puede demostrar que un tercio de  $F_R$  viene por la presión del fluido y dos tercios por su viscosidad.<sup>[2][3]</sup> Además tenemos el peso de la esfera y el empuje arquimediano

$$mg = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g \quad \text{y} \quad F_A = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho' g. \quad (9.50)$$

Entonces la velocidad límite de caída está dada por

$$mg - F_A - F_R = 0 \quad \text{o sea} \quad \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho' g - 6\pi\eta v R = 0, \quad (9.51)$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

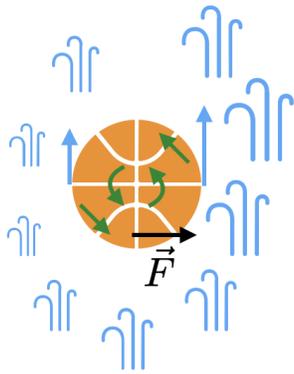
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

[http://web.mit.edu/fluids-modules/www/low\\_speed\\_flows/2-5Stokes.pdf](http://web.mit.edu/fluids-modules/www/low_speed_flows/2-5Stokes.pdf)

## 9.10. Efecto Magnus

El efecto Magnus es el efecto sobre un balón de fútbol cuando se tira una falta o un corner, o sobre una pelota de tenis cuando se lifta o se corta.



Si tenemos una esfera que rota en el seno de un fluido, como por ejemplo en la figura el balón cae hacia abajo y pues el viento se dirige hacia arriba, el cuerpo arrastra a los cuerpos próximas, disminuyendo el viento aparente en la parte derecha (en la figura) y aumentando en la parte izquierda (velocidad  $v_2$ ). Si ahora en un aproximación cruda (una aproximación mejor sería utilizar la fórmula de Kutta-Jowdowski) aplicamos el teorema de Bernoulli, concluimos que la presión en la parte superior será mayor que en la parte inferior (mayor en la parte que aleja que en la parte que se acerca), lo cual produce una diferencia de presión y entonces una fuerza perpendicular a la velocidad que hace que se curve la trayectoria. Como  $p + (1/2)\rho v^2 = \text{constante}$ , la presión es menor cuando la velocidad es mayor. Por tanto la fuerza se dirige hacia la velocidad mayor.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## 9.11. Ejercicios

### Problema 1

Un cable anclado al fondo de un lago sostiene una esfera hueca de plástico bajo la superficie. El volumen de la esfera es de  $0,3m^3$  y la tensión en el cable es de 900 N. Calculen:

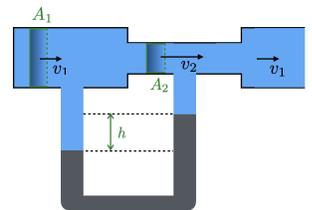
- La fuerza ejercida por el agua sobre la esfera.
- La masa de la esfera. El cable se rompe y la esfera sube a la superficie. En equilibrio, ¿Qué fracción del volumen de la esfera se encuentra sumergida?

### Problema 2

¿ Cuánta agua fluiría en 30 s por un tubo capilar de 200 mm de longitud y 1.5 mm de diámetro interno, si la diferencia de presiones a lo largo del tubo es 4 mm de mercurio? La viscosidad del agua es de 0.8 cP y la densidad del mercurio es de 13600 kg/m<sup>3</sup>.

### Problema 3

La figura representa un esquema de un medidor Venturi equipado con un manómetro diferencial de mercurio. En el punto 1 (la toma), el diámetro es de 12 cm, mientras que en la garganta, punto 2, el diámetro es 6 cm. ¿Cuál es el flujo Q del agua a través del medidor, si la lectura en el manómetro es de 22 cm? Dato: la densidad del mercurio es 13.6 g/cm<sup>3</sup>.



### Problema 4

Hay agua hasta una altura H en un tanque abierto con paredes verticales. Se hace un agujero en una pared a una profundidad h por debajo de la superficie del agua. a) ¿A qué distancia R del pie de la pared tocará el suelo el chorro que sale? b) Sea  $H = 14$  m y  $h = 4$  m, ¿ A qué distancia por debajo de la superficie podría hacerse un segundo agujero tal que el chorro que salga por él tenga el mismo alcance que el que sale por el primero?

### Problema 5

Una varilla uniforme, de densidad  $\rho = 0,5\rho_{\text{agua}}$ , se sujeta en un extremo por una cuerda, mientras el otro flota libremente en el agua (ver figura).

Dibuja las fuerzas que actúan sobre la varilla. En la situación de equilibrio, ¿



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

neta (incluida la gravedad) que actúa sobre el avión. La densidad del aire es de 1.2 kg/m<sup>3</sup>.

Cartagena99

## 9.12. Soluciones de los ejercicios

### Problema 1

Un cable anclado al fondo de un lago sostiene una esfera hueca de plástico bajo la superficie. El volumen de la esfera es de  $0,3\text{m}^3$  y la tensión en el cable es de 900 N. Calculen:

- La fuerza ejercida por el agua sobre la esfera.
- La masa de la esfera. El cable se rompe y la esfera sube a la superficie. En equilibrio, ¿Qué fracción del volumen de la esfera se encuentra sumergida?

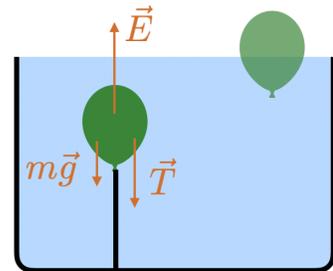
Datos: densidad del agua  $\rho_a = 1000\text{ kg/m}^3$ , volumen  $V = 0,3\text{ m}^3$  y tensión  $T = 900\text{ N}$ .

La fuerza que ejerce el agua sobre la esfera es el empuje de Arquímedes:

$$E = \rho_a V g = 2,94\text{ N} \quad (9.53)$$

Cuando la esfera está anclada al fondo

$$mg + T = E \quad \rightarrow \quad m = \frac{E - T}{g} = 208\text{ kg.} \quad (9.54)$$



Le esfera flota porque  $208 < 300$ . La fracción sumergida del volumen de la esfera es

$$x = \frac{M/\rho_a}{V} = 0,69. \quad (9.55)$$

### Problema 2

¿ Cuánta agua fluiría en 30 s por un tubo capilar de 200 mm de longitud y 1.5 mm de diámetro interno, si la diferencia de presiones a lo largo del tubo es 4 mm de mercurio? La viscosidad del agua es de 0.8 cP y la densidad del mercurio es de 13600 kg/m<sup>3</sup>.

Datos:  $\Delta p = 4\text{ Torr} = 4 \times 133,3 = 533\text{ Pa}$  y  $\eta = 0,8\text{ cP} = 0,8 \times 10^{-3}\text{ Pa.s}$ .

De la formula de Poisseuille, el flujo del tubo es  $Q$  y el volumen de agua que fluye por el tubo capilar en  $\Delta t = 30\text{ s}$  es  $V$ :

$$Q = \frac{\pi R^4}{8nl} \Delta p = 4,14 \times 10^{-7}\text{ m}^3.\text{s}^{-1} \quad V = Q\Delta t = 1,24 \times 10^{-2}\text{ L} \quad (9.56)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

### Problema 3

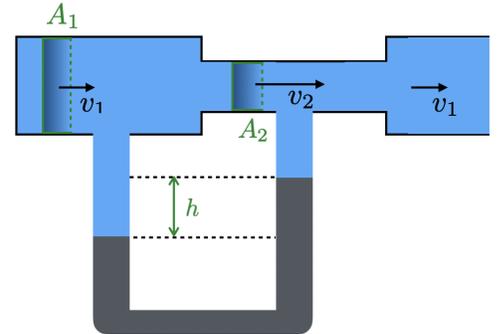
La figura representa un esquema de un medidor Venturi equipado con un manómetro diferencial de mercurio. En el punto 1 (la toma), el diámetro es de 12 cm, mientras que en la garganta, punto 2, el diámetro es 6 cm. ¿Cuál es el flujo  $Q$  del agua a través del medidor, si la lectura en el manómetro es de 22 cm? Dato: la densidad del mercurio es  $13.6 \text{ g/cm}^3$ .

Del teorema de Bernoulli obtenemos

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad \rightarrow \quad v_1^2 - v_2^2 = \frac{2}{\rho}(p_1 - p_2) \quad (9.57)$$

Del principio de continuidad

$$Q = S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad \rightarrow \quad v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1 = \left(\frac{12}{6}\right)^2 = 4v_1 \quad (9.58)$$



Luego

$$(16 - 1)v_1^2 = \frac{2}{\rho}(p_1 - p_2) \quad \rightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{15\rho}} = \sqrt{\frac{2 \times 220 \times 133,3}{15 \times 10^3}} = 1,98 \text{ m/s}$$

El flujo es  $Q = S_1 v_1 = 22,4 \text{ l/s}$ .

### Problema 4

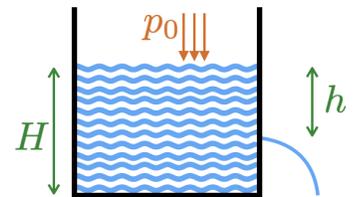
Hay agua hasta una altura  $H$  en un tanque abierto con paredes verticales. Se hace un agujero en una pared a una profundidad  $h$  por debajo de la superficie del agua. a) ¿A qué distancia  $R$  del pie de la pared tocará el suelo el chorro que sale? b) Sea  $H = 14 \text{ m}$  y  $h = 4 \text{ m}$ , ¿A qué distancia por debajo de la superficie podría hacerse un segundo agujero tal que el chorro que salga por él tenga el mismo alcance que el que sale por el primero?

La velocidad de salida del chorro es  $v_x = \sqrt{2gh}$ .

Como sale a velocidad nula en la dirección vertical, el tiempo de caída es

$$\frac{1}{2}gt^2 = H - h \quad \rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2(H - h)}{g}} \quad (9.59)$$

Como no hay aceleración en la dirección horizontal, la velocidad es constante y distancia recorrida es



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Es  $n = 10 \text{ m}$ .

## Problema 5

Una varilla uniforme, de densidad  $\rho = 0,5\rho_{\text{agua}}$ , se sujeta en un extremo por una cuerda, mientras el otro flota libremente en el agua (ver figura).

- (a) Dibuja las fuerzas que actúan sobre la varilla.  
 (b) En la situación de equilibrio, ¿Qué fracción de la longitud de la varilla está sumergida?

Llamando  $m$  la masa de la varilla y  $x$  la fracción sumergida. Su volumen total es  $V = m/\rho_V$ . El peso es  $mg$  y el empuje es

$$E = xV\rho_{\text{agua}}g = x\frac{\rho_{\text{agua}}}{\rho_V}mg = 2xmg. \quad (9.62)$$

Tomando momentos con respecto al centro de la varilla:

$$0 = T\frac{L}{2}\cos\alpha - E\left(\frac{L}{2} - x\frac{L}{2}\right)\cos\alpha \quad (9.63a)$$

$$LT = L(1-x)E \quad \rightarrow \quad T = (1-x)E. \quad (9.63b)$$

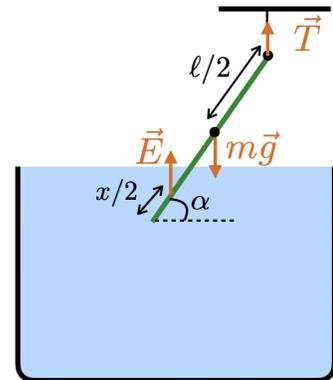
Además

$$mg = E + T = E + (1-x)E = (2-x)E = (2-x)2xmg \quad (9.64)$$

Luego

$$2x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{4} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (9.65)$$

la solución física es  $1 - \sqrt{2}/2 = 29,3\%$ .



## Problema 6

Fluye aire horizontalmente por las alas de una avioneta de modo que su velocidad es de 70 m/s por encima del ala y 50 m/s por debajo. Si la avioneta tiene una masa de 700 kg y un área de alas de 9 m<sup>2</sup>, estime la fuerza vertical neta (incluida la gravedad) que actúa sobre el avión. La densidad del aire es de 1.2 kg/m<sup>3</sup>

Aplicando el teorema de Bernoulli

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70