



CEU

*Universidad
San Pablo*

Tema 1: Vectores y Matrices

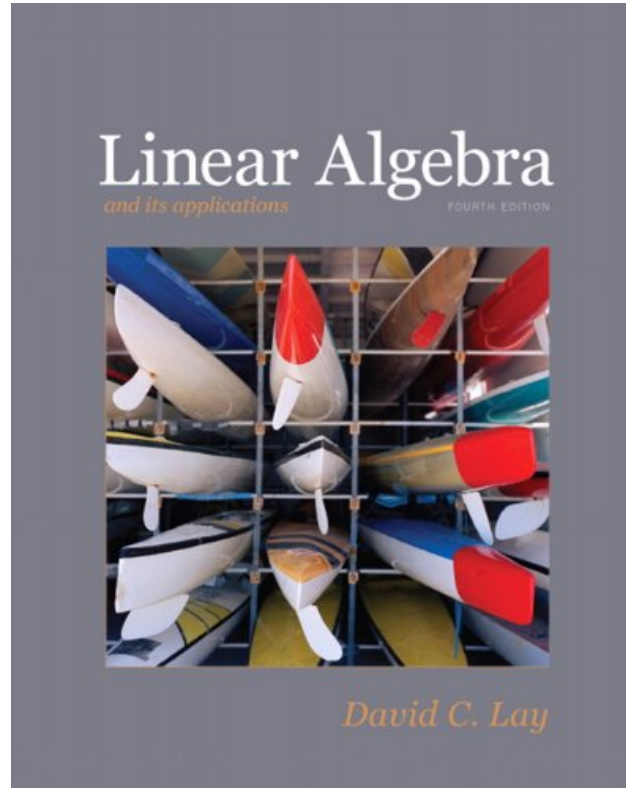
Curso 2016/2017

Ruzica Jevtic
Universidad San Pablo CEU
Madrid

Índice de contenidos

- Vectores y operaciones básicas
- Combinaciones lineales
- Producto escalar – interior – interno – punto
- Norma, Longitud de un vector y vectores unitarios
- Distancias y ángulos
- Multiplicación por matrices

Referencias



Lay D. *Linear algebra and its applications* (4th ed). Chapter 1.

Índice de contenidos

- Vectores y operaciones básicas
- Combinaciones lineales
- Producto escalar – interior – interno – punto
- Norma, Longitud de un vector y vectores unitarios
- Distancias y ángulos
- Multiplicación por matrices

¿Qué es un vector?

- Informalmente, un **vector** es una colección ordenada de n números del mismo tipo. Decimos que tiene n componentes $(1, 2, \dots, n)$

Ejemplos

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^3$$

Es una colección de tres números enteros

$$\begin{pmatrix} -1.1 \\ 1.1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2$$

Es una colección de dos números racionales

$$\begin{pmatrix} -1.1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Es una colección de dos números reales

Octave - Matlab

```
[-1; 0; 1]
```

```
[-1.1; 1.1]
```

```
[-1.1; sqrt(2)]
```

Vectores en $\mathbb{R}^2$

- Una matriz con una sola columna se denomina **vector columna** o simplemente **vector**
- Ejemplos de vectores con 2 entradas son:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} .2 \\ .3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

donde **w1** y **w2** puede ser cualquier número real.

- Al conjunto de todos los vectores con 2 entradas se le denomina $\mathbb{R}^2$
- Dos vectores en $\mathbb{R}^2$ son **iguales** si y sólo si sus correspondientes entradas son iguales

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \dots \text{pero} \dots \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Vectores en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^n$

- En $\mathbb{R}^3$, los vectores tienen 3 entradas: $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

Al conjunto de todos los vectores con 3 entradas se le denomina $\mathbb{R}^3$

- En $\mathbb{R}^n$, los vectores tienen n entradas: $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$

Al conjunto de todos los vectores con n entradas se le denomina $\mathbb{R}^n$

- Al vector cuyas entradas son todas cero, se le denomina **Vector Cero** y se le denota como **0**.

Traspuesta de un vector

- Distinguiremos entre **vector columna ($\mathbf{v}$)** y **vector fila ($\mathbf{w}$)**

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{w} = (w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n)$$

- En el primer caso, decimos que $\mathbf{v}$ es un vector de **$n \times 1$ posiciones**, mientras que en el segundo caso, decimos que $\mathbf{w}$ es un vector de **$1 \times n$ posiciones**.

Ejemplos

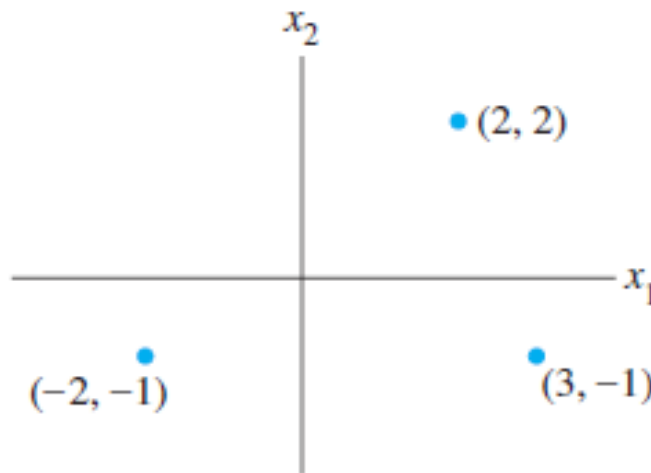
$$(-1 \ 1)^T = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Octave

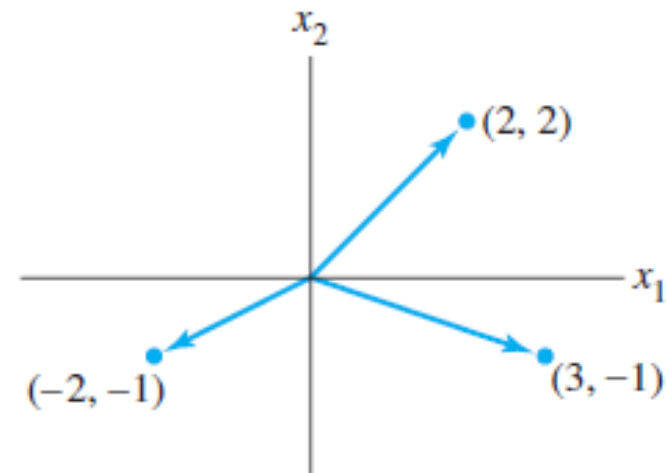
$$[-1 \ 1]'$$

Representación gráfica (descripción geométrica)

- En $\mathbb{R}^2$:
 - Si consideramos un sistema de coordenadas rectangular (plano), cada punto viene determinado por un par ordenado de números (punto geométrico) $\rightarrow$ (a, b)
 - Se puede identificar el punto (a,b) con el vector columna $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$
 - Origen: $(0, 0)$



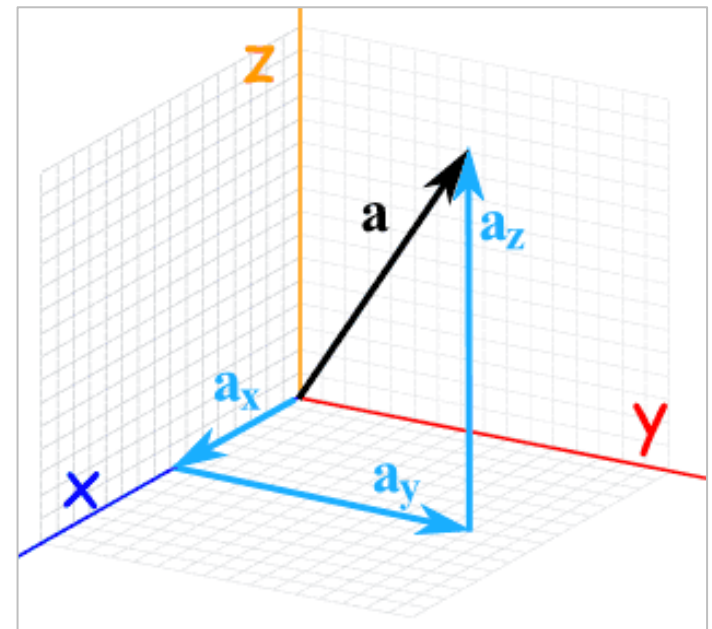
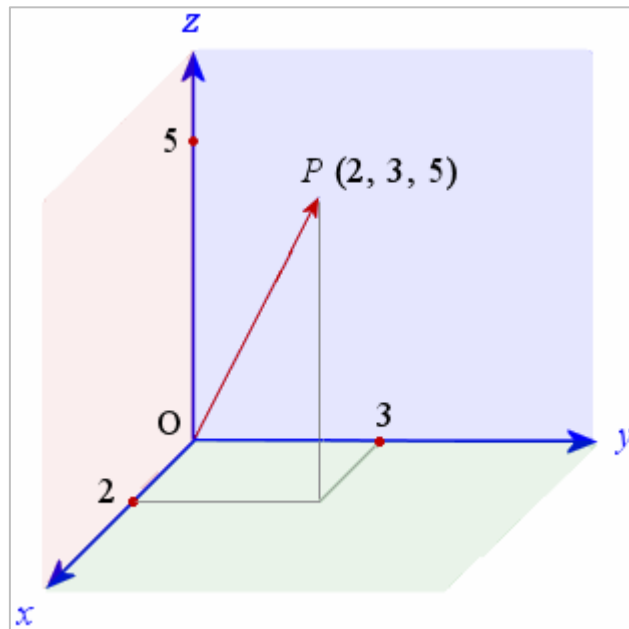
*Vectores como puntos
(localización en el espacio)*



*Vectores como flechas
(orientación + sentido)*

Representación gráfica (descripción geométrica)

- En $\mathbb{R}^3$:
 - Geométricamente, se representa como un punto o una flecha en un espacio de coordenadas tridimensional
 - **Origen:** (0, 0, 0)



Suma de vectores

- Dados dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, la **suma** de los dos vectores ($\mathbf{u} + \mathbf{v}$) se obtiene sumando los valores que ocupan el mismo orden dentro de los vectores

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2 \\ -2 + 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{u} & & \mathbf{v} \qquad \qquad \mathbf{u} + \mathbf{v} \end{array}$$

Octave

```
[1; -2] + [2; 5]
```

Suma de vectores

- De manera general, la **suma de dos vectores** $\in \mathbb{R}^n$, se define como:

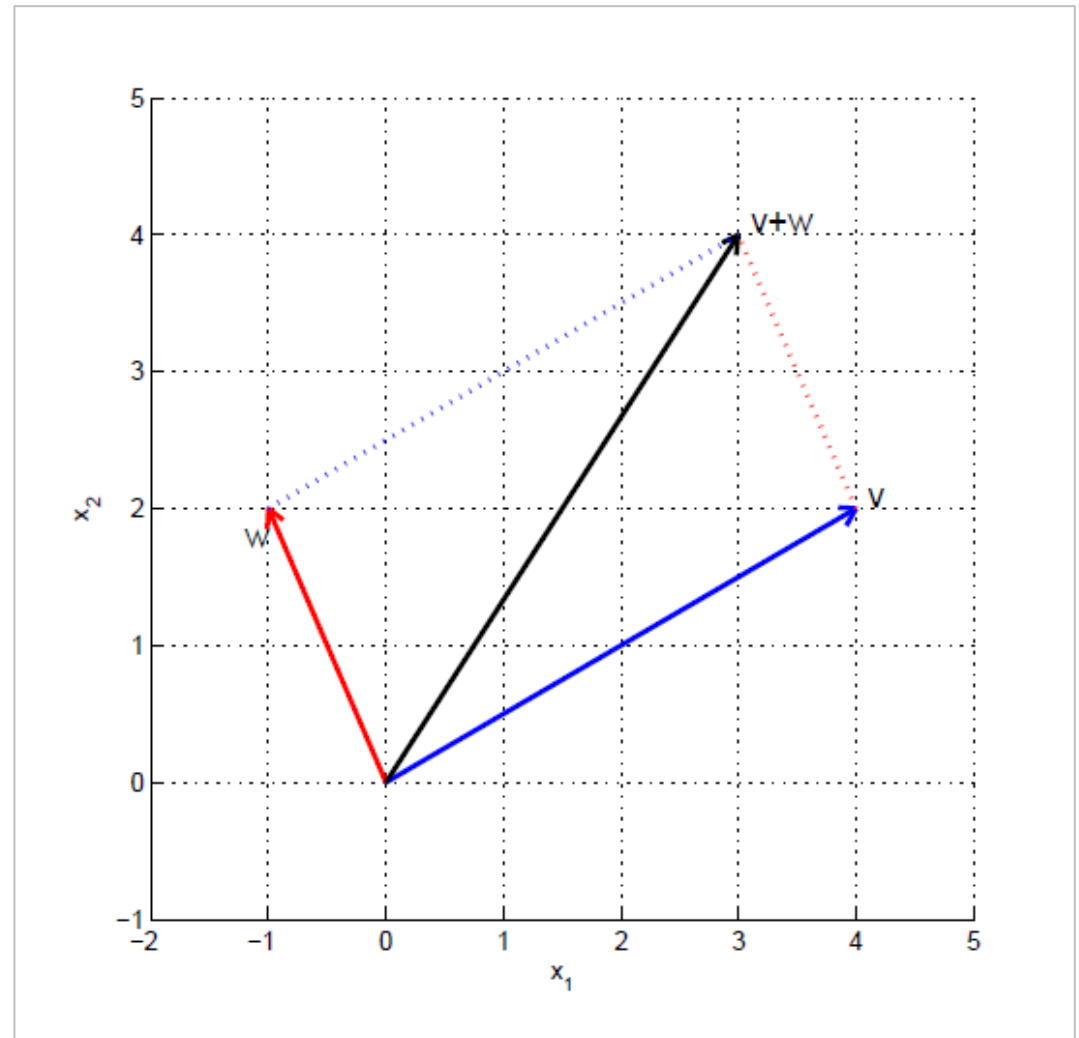
$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{pmatrix} \quad u + w = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \dots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$$

- Nota:** dos vectores se pueden sumar si y solamente si son del mismo tipo (vectores fila o vectores columna)

Suma de vectores – Interpretación geométrica

$$v = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$u + w = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$



Producto por un escalar

- Dado un vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ y un número real c , la **multiplicación escalar** de $\mathbf{u}$ por c , es el **vector $c\mathbf{u}$** obtenido al multiplicar cada entrada de $\mathbf{u}$ por c

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad c = 5 \quad c\mathbf{u} = 5 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Octave

```
5 * [3; -1]
```

Producto por un escalar

- De manera general, dado un **vector** $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ y un **escalar** c , la **multiplicación** de c por $\mathbf{v}$ se define como:

$$c\mathbf{v} = \begin{pmatrix} cV_1 \\ cV_2 \\ \dots \\ cV_n \end{pmatrix}$$

Ejemplos

$$2 \begin{pmatrix} -1.1 \\ 1.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.2 \\ 2.2 \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} -1.1 \\ 1.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ -1.1 \end{pmatrix}$$

Octave

$$2 * [-1.1; 1.1]$$

$$- [-1.1; 1.1]$$

Producto por un escalar – Interpretación geométrica

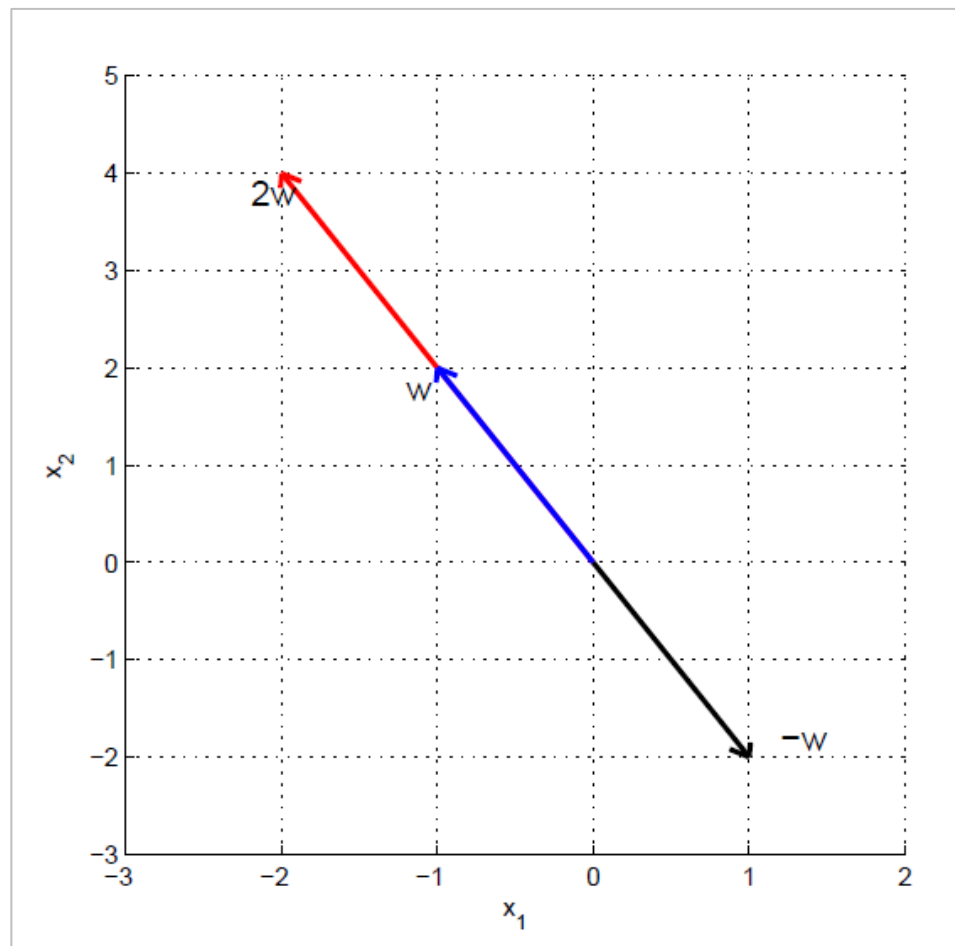
$$w = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$2w = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$-w = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es la forma de todos los vectores w escalados de la forma cw ?

- Si $w = 0$, entonces es un punto (0)
- Si $w \neq 0$, entonces es la recta que pasa por el 0 y w .



Ejemplo de combinación de operaciones

Ejemplo

Dados los vectores $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$, calcular $4\mathbf{u}$, $(-3)\mathbf{v}$, y $4\mathbf{u} + (-3)\mathbf{v}$

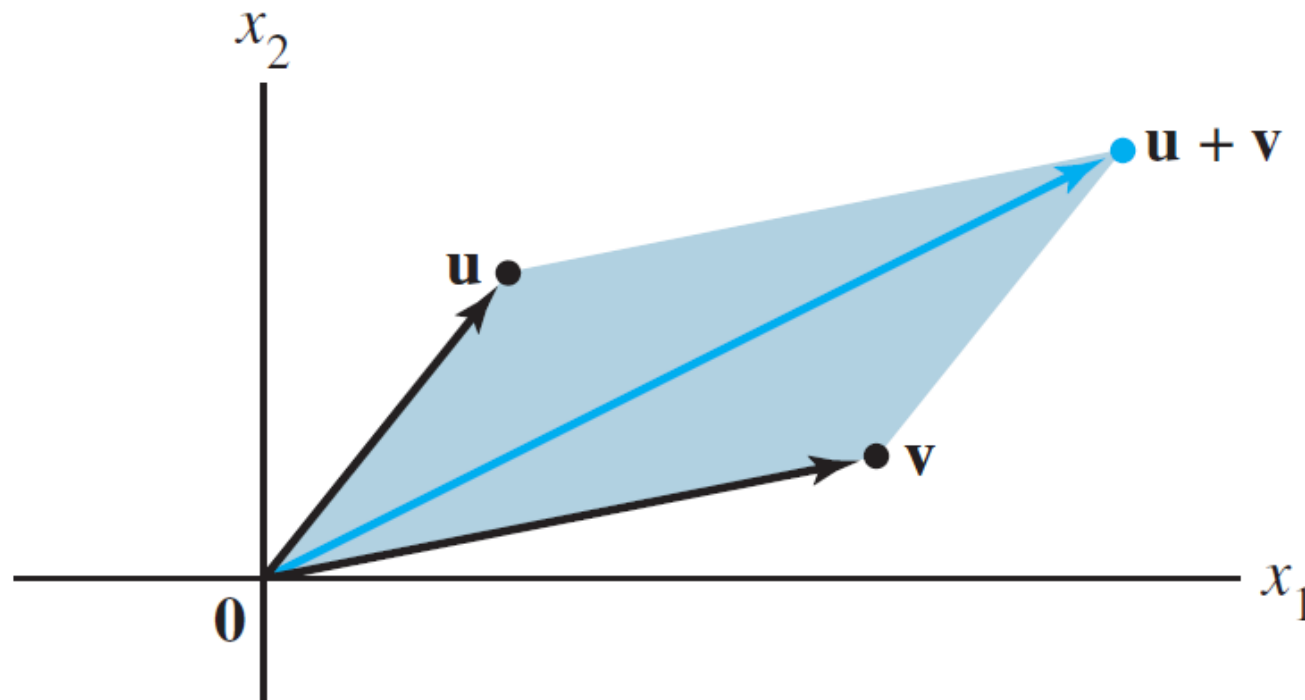
$$4\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$(-3)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -6 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$4\mathbf{u} + (-3)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

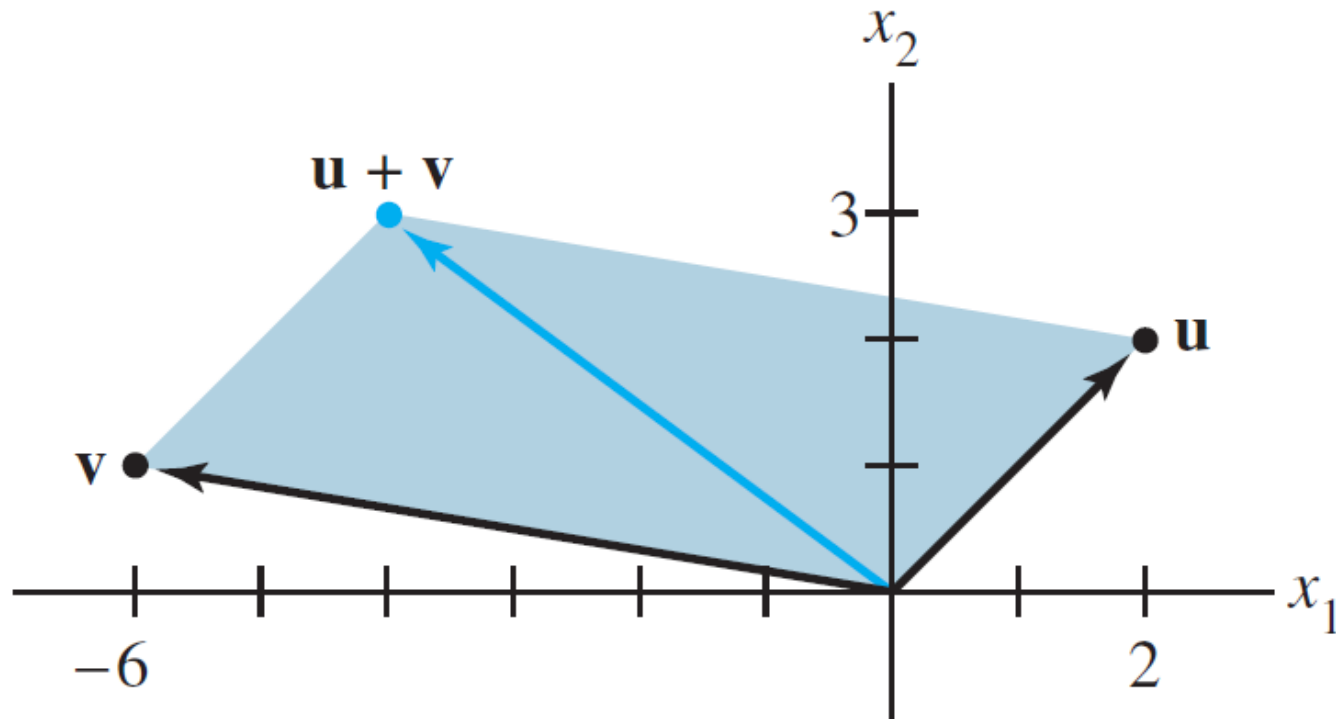
Regla del paralelogramo para la suma

- Si dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ son representados como puntos en el plano, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ corresponde al cuarto vértice del paralelogramo cuyos otros vértices son $\mathbf{u}$, $\mathbf{0}$, y $\mathbf{v}$



Regla del paralelogramo para la suma

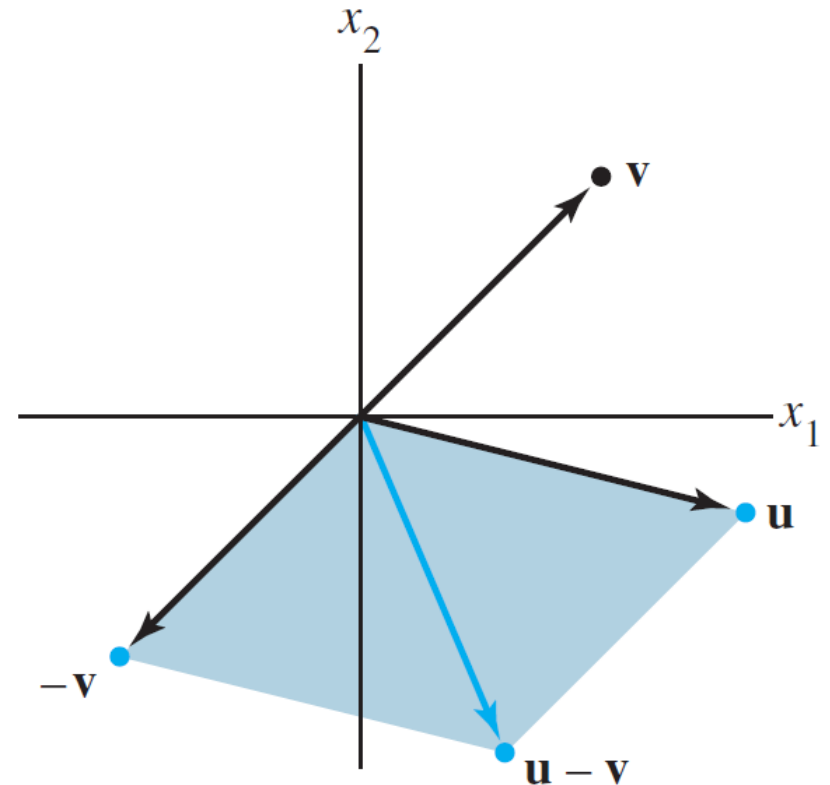
- **Ejemplo:** dibujar los vectores $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}$, y $\mathbf{u} + \mathbf{v}$



Resta de vectores

- Dados 2 vectores **u** y **v**, la resta de ambos es equivalente a sumar al primero el simétrico/opuesto del segundo

$$u - v = u + (-1)v$$



Propiedades algebraicas en $\mathbb{R}^n$

- Para todo vector $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ y todo escalar c y d , se verifica:

Respecto a la suma de vectores

$$(i) \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

$$(ii) \quad (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

$$(iii) \quad \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$$

$$(iv) \quad \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = -\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Respecto a la suma de vectores y producto escalar

$$(v) \quad c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$$

$$(vi) \quad (c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$$

Respecto al producto escalar

$$(vii) \quad c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$$

$$(viii) \quad 1\mathbf{u} = \mathbf{u}$$

Índice de contenidos

- Vectores y operaciones básicas
- **Combinaciones lineales**
- Producto escalar – interior – interno – punto
- Norma, Longitud de un vector y vectores unitarios
- Distancias y ángulos
- Multiplicación por matrices

Combinación lineal

- Dado un conjunto de p vectores $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p) \in \mathbb{R}^n$ y un conjunto de p escalares $(c_1, c_2, \dots, c_p)$, se denomina **combinación lineal** al vector $\mathbf{y}$ definido como:

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^p c_i \mathbf{v}_i = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_p \mathbf{v}_p$$

Ejemplos: dados los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$

$$\sqrt{3} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{v}_1 (= \frac{1}{2} \mathbf{v}_1 + 0 \mathbf{v}_2)$$

$$0 (= 0 \mathbf{v}_1 + 0 \mathbf{v}_2)$$

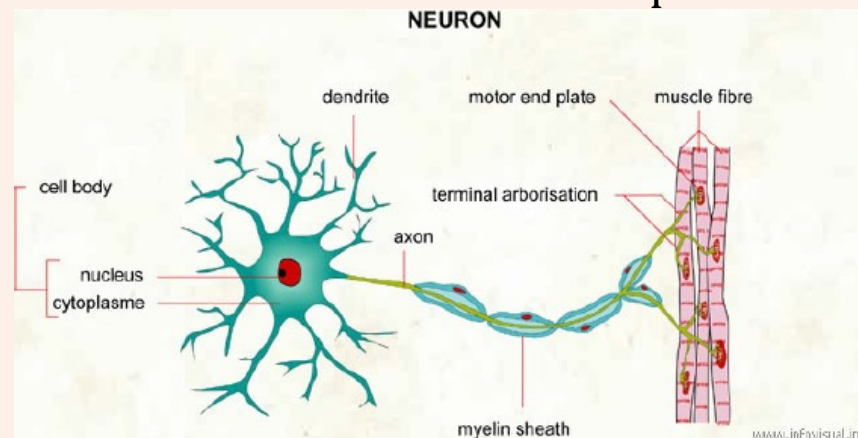
Combinación lineal

Ejemplo: modelización de una neurona

Un modelo muy básico y aceptado de la actividad de una neurona viene dado por:

$$output = f\left(\sum_i peso_i \cdot entrada_i\right)$$

donde $f(\mathbf{x})$ no es una función lineal. Este modelo se usa para modelizar redes de neuronas artificiales.



El cerebro humano tiene del orden de 10^{11} neuronas y unas 10^{18} conexiones (<https://www.youtube.com/watch?v=zLp-edwiGUU>)

Combinación lineal

Ejemplo

$$2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Octave

```
format rat  
2 * [1; 3] + 5 * [2; 1]
```

Ejemplo

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{6} \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

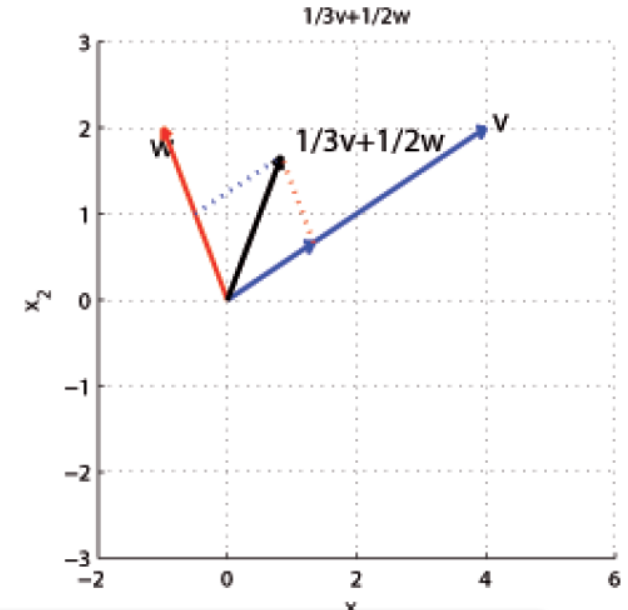
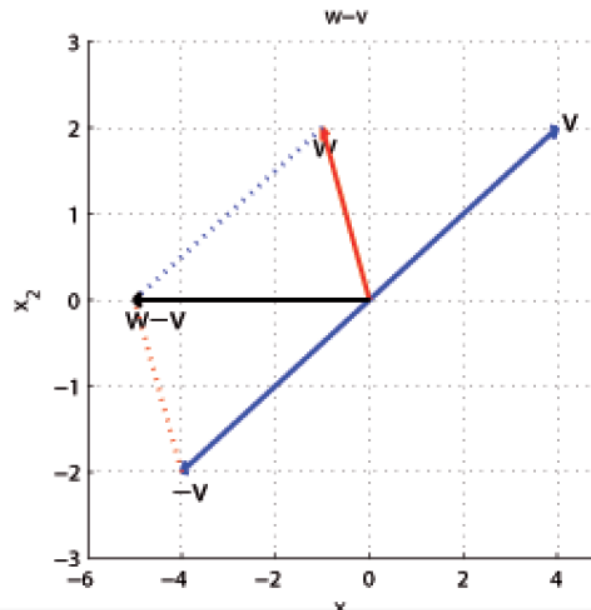
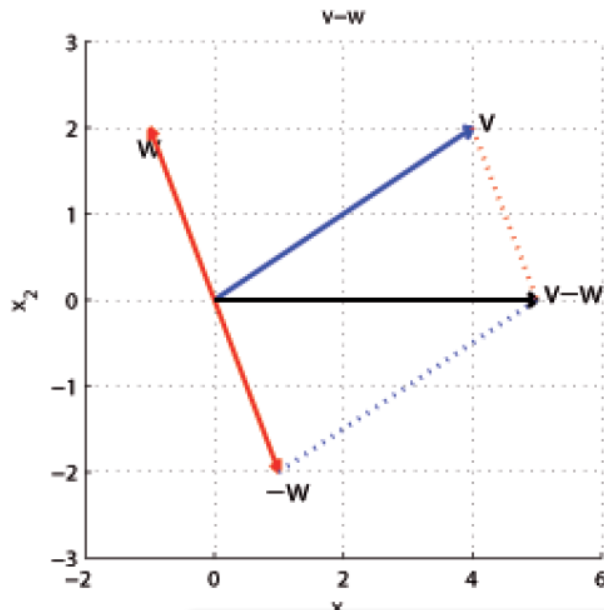
Octave

```
format rat  
1/2 * [-1; 1] - 2/3 * [2; 2]
```

Combinación lineal

Ejemplo

Dados $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, calcular y representar gráficamente $\mathbf{v} - \mathbf{w}$, $\mathbf{w} - \mathbf{v}$, $\frac{1}{3}\mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{w}$



Puede pensarse en los coeficientes como instrucciones de movimiento. Por ejemplo, en la figura de la derecha, las instrucciones serían: “muévete $\frac{1}{3}$ de $\mathbf{v}$ a lo largo de $\mathbf{v}$, y después $\frac{1}{2}$ de $\mathbf{w}$ a lo largo de $\mathbf{w}$ ”.

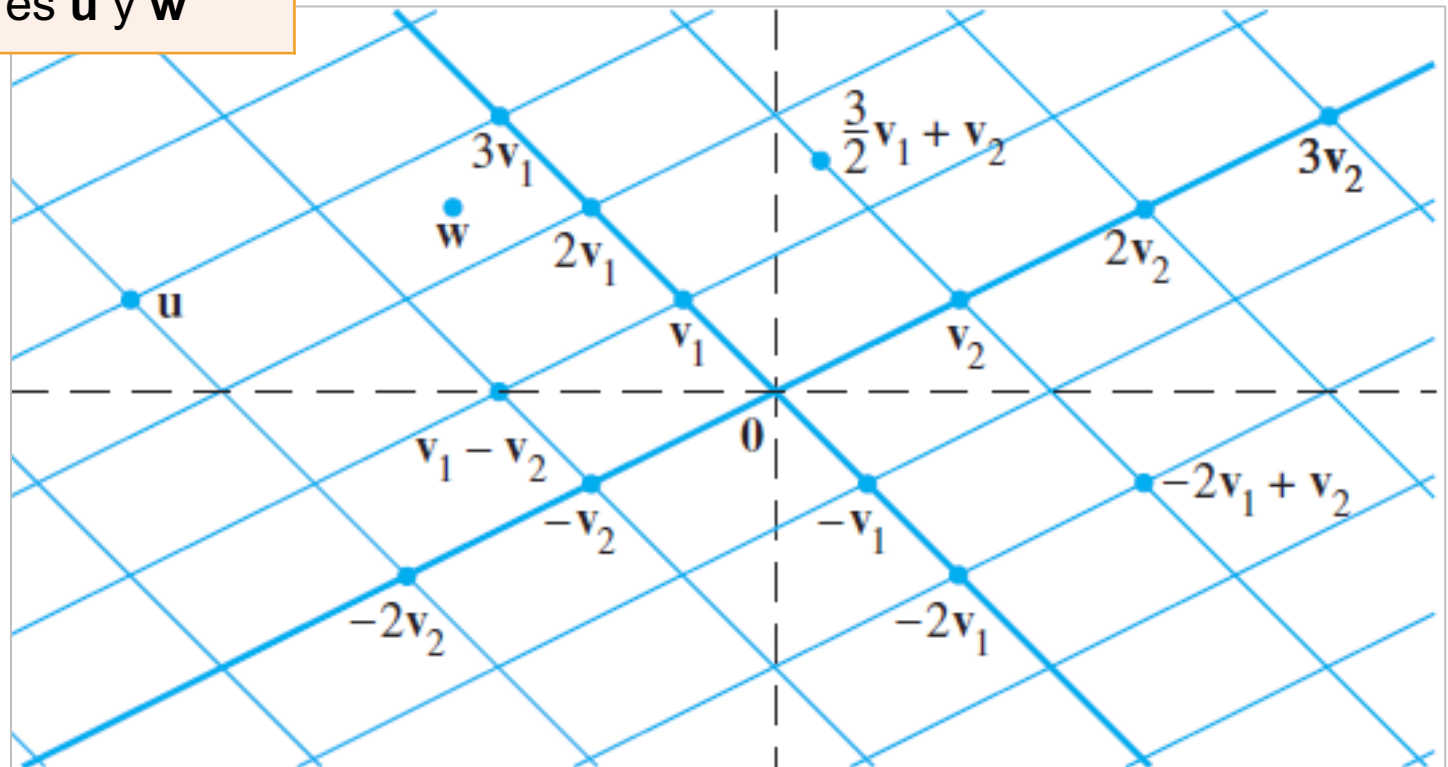
Combinación lineal

Ejemplo

Dados $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$,
estimar las combinaciones lineales
para generar los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{w} = \frac{5}{2}\mathbf{v}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{v}_2$$

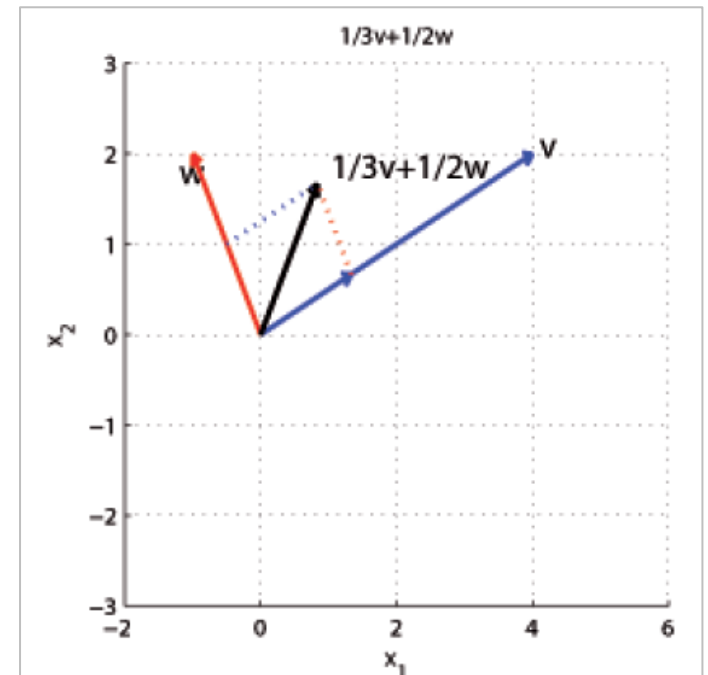


Combinación lineal

- ¿Qué forma tienen todas las combinaciones lineales de la forma $c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$?
 - Si los dos vectores no son colineales (es decir, $\mathbf{w} \neq k\mathbf{v}$), entonces es un plano que pasa por $\mathbf{0}$, y contiene a $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

El plano generado por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es el conjunto de todos los vectores que pueden ser generados como una combinación lineal de ambos vectores

$$\Pi = \{ r \mid r = c\mathbf{v} + d\mathbf{w} \quad \forall c, d \in \mathbb{R} \}$$



Combinación lineal

- El **subespacio generado** (*spanned subspace*) por los vectores $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p) \in \mathbb{R}^n$ es el conjunto de todos los vectores que pueden ser expresados como una combinación lineal de dichos vectores
- Formalmente se define como:

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p \rangle = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\} \triangleq \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_p\mathbf{v}_p\}$$

Ejemplo

Asumiendo que todos los vectores son linealmente independientes:

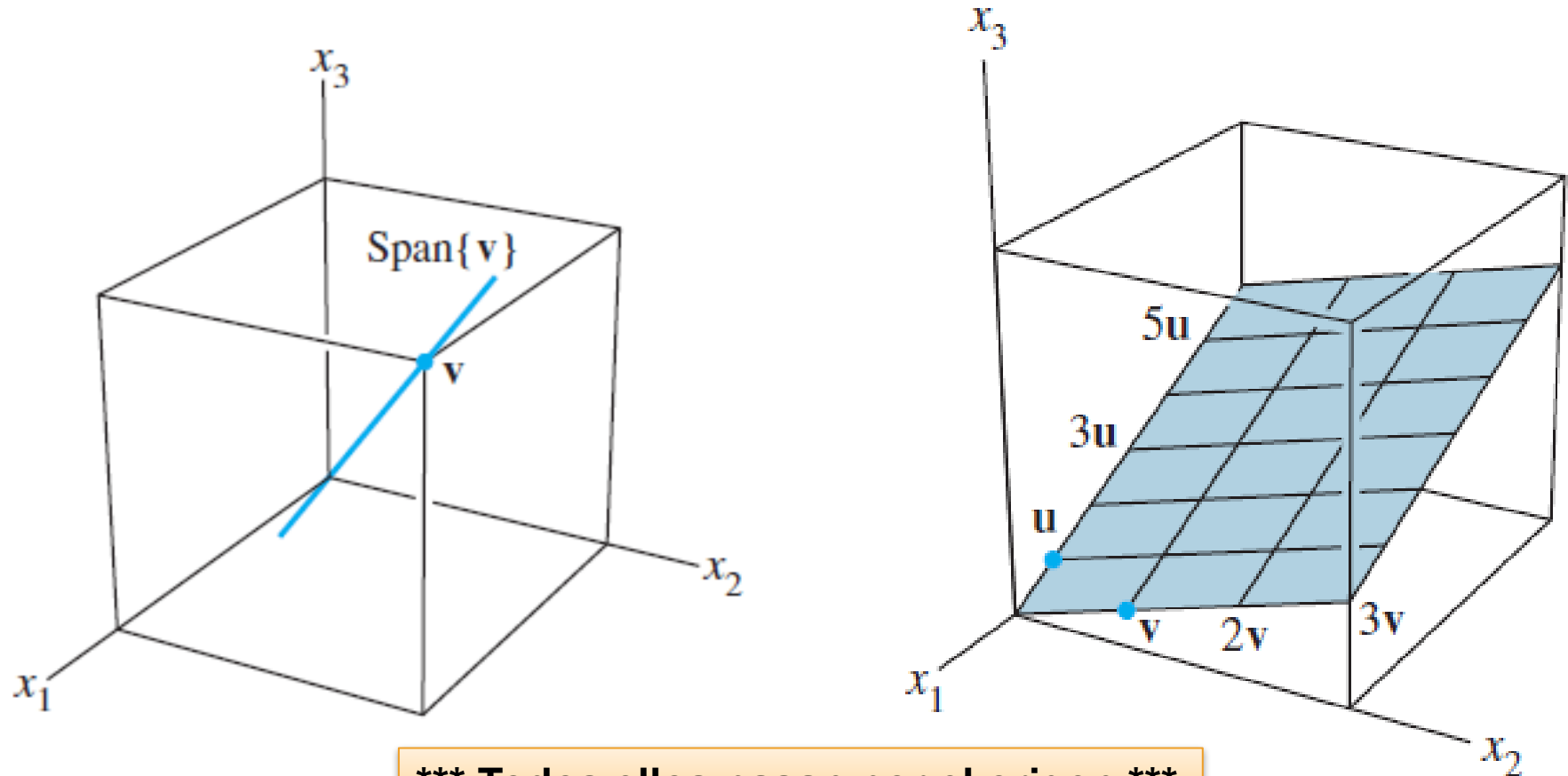
- $\text{Span}\{\mathbf{v}_1\}$ es una línea recta
- $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es un plano
- $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1}\}$ es un hiperplano

Propiedad

$$\mathbf{0} \in \text{Span}\{\cdot\}$$

Combinación lineal

Descripción geométrica del **Span**{**v**} y el **Span**{**u**, **v**}



*** Todos ellos pasan por el origen ***

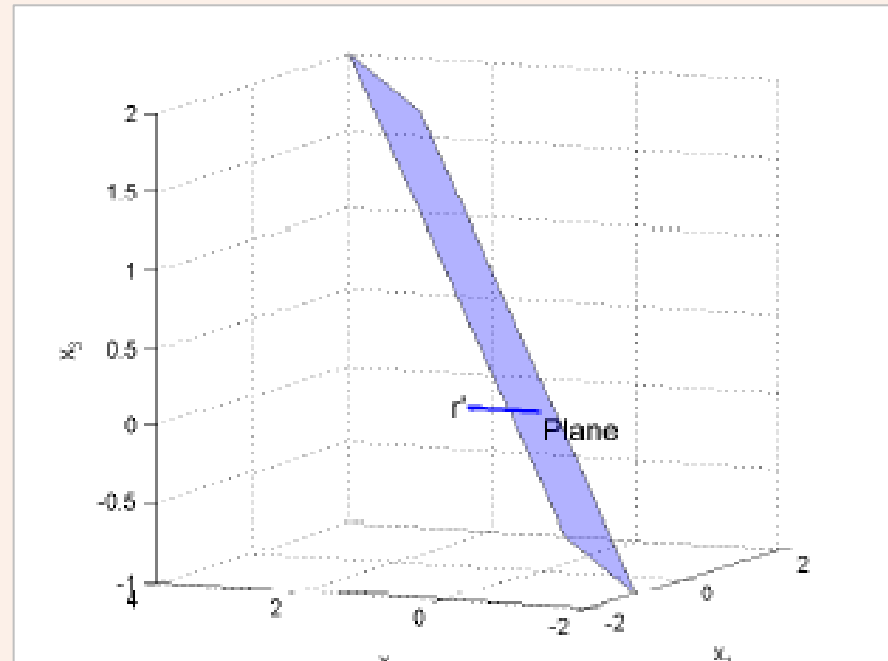
Combinación lineal

Fuera del plano

Dado $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$ y $\mathbf{w} = (0, 1, 1)$, las combinaciones lineales de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ forman un plano en 3D. Todos los puntos pertenecientes a este plano son de la forma:

$$\Pi = \{ r \mid r = c(1, 1, 0) + d(0, 1, 1) \ \forall c, d \in \mathbb{R} \} = \{ r = (c, c + d, d) \ \forall c, d \in \mathbb{R} \}$$

Por tanto, el vector $\mathbf{r}' = (0, 1, 0) \notin \Pi$ y está fuera del plano.

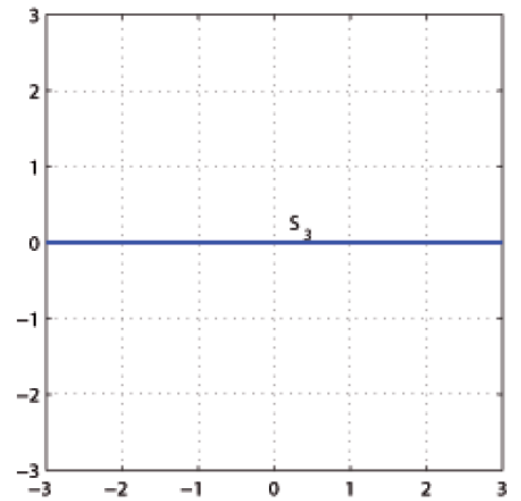
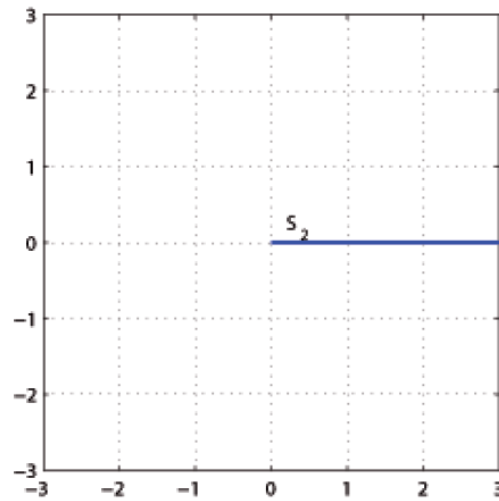
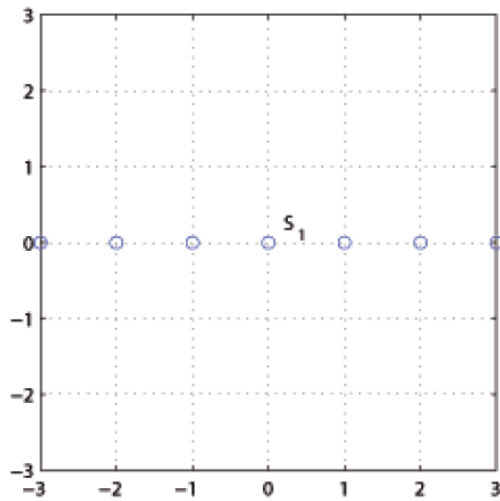


Combinación lineal

Conjuntos de puntos

Dado $\mathbf{v} = (1, 0)$,

1. $S_1 = \{ r = c\mathbf{v}, \forall c \in \mathbb{Z} \}$ es un conjunto de puntos
2. $S_2 = \{ r = c\mathbf{v}, \forall c \in \mathbb{R}^+ \}$ es una semilínea
3. $S_3 = \{ r = c\mathbf{v}, \forall c \in \mathbb{R} \}$ es una línea

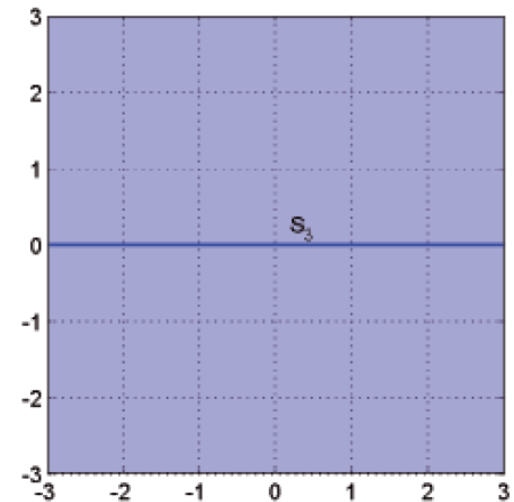
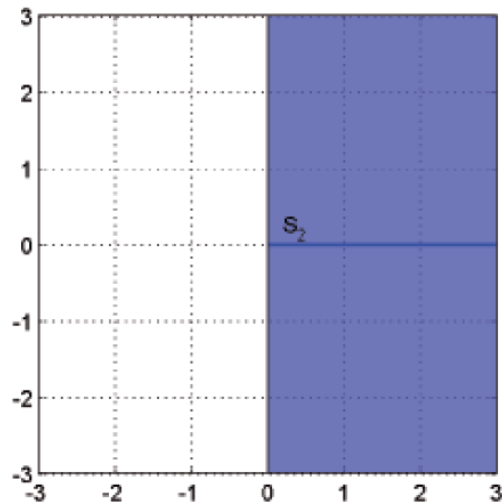
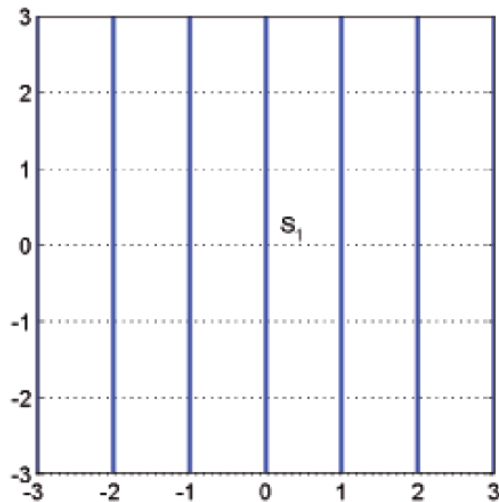


Combinación lineal

Conjuntos de puntos

Dado $\mathbf{v} = (1, 0)$ y $\mathbf{w} = (0, 1)$,

1. $S_1 = \{ \mathbf{r} = c\mathbf{v} + d\mathbf{w}, \forall c \in \mathbb{Z}, \forall d \in \mathbb{R} \}$ es un conjunto de líneas
2. $S_2 = \{ \mathbf{r} = c\mathbf{v} + d\mathbf{w}, \forall c \in \mathbb{R}^+, \forall d \in \mathbb{R} \}$ es un semiplano
3. $S_3 = \{ \mathbf{r} = c\mathbf{v} + d\mathbf{w}, \forall c, d \in \mathbb{R} \}$ es un plano



Combinación lineal

Combinación de coeficientes

Dado $\mathbf{v} = (2, -1)$, $\mathbf{w} = (-1, 2)$ y $\mathbf{b} = (1, 0)$, encontrar un valor para c y d tal que $\mathbf{b} = c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$

Solución:

Necesitamos encontrar un c y un d tales que:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c - d \\ 2d - c \end{bmatrix}$$

Esto nos da un sistema simple de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2c - d &= 1 \\ 2d - c &= 0 \end{aligned}$$

Cuya solución es $c = 2/3$ y $d = 1/3$

Octave

$$2/3 * [2; -1] + 1/3 * [-1; 2]$$

- Del capítulo 1, sección 3 de *Lay (4th ed.)*:
 - Ejercicio 1.3.1
 - Ejercicio 1.3.3
 - Ejercicio 1.3.7
 - Ejercicio 1.3.25
 - Ejercicio 1.3.27

Índice de contenidos

- Vectores y operaciones básicas
- Combinaciones lineales
- **Producto escalar – interior – interno – punto**
- Norma, Longitud de un vector y vectores unitarios
- Distancias y ángulos
- Multiplicación por matrices

Producto escalar de 2 vectores

- **Producto escalar** – interior – interno – punto (Inner – dot product)
- Dados dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, el producto escalar entre ambos se define como:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \triangleq \mathbf{v}^T \mathbf{w} = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \mathbf{w}_i = \mathbf{v}_1 \mathbf{w}_1 + \mathbf{v}_2 \mathbf{w}_2 + \cdots + \mathbf{v}_n \mathbf{w}_n$$

- Matemáticamente, el concepto de producto escalar es mucho más general. La definición anterior es una particularización para vectores $\in \mathbb{R}^n$. Aunque es el más común, no es el único.

Producto escalar de 2 vectores

Ejemplos

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = (-3) \cdot (-2) + 4 \cdot (-1) = 2$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = 2 \cdot 3 + (-3) \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) = 7$$

Octave

```
dot([4; 2], [-1; 2])
```

```
dot([-3; 4], [-2; -1])
```

```
dot([2; -3; 1], [3; -1; -2])
```

Propiedad

Conmutativa

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$$

Índice de contenidos

- Vectores y operaciones básicas
- Combinaciones lineales
- Producto escalar – interior – interno – punto
- Norma, Longitud de un vector y vectores unitarios
- Distancias y ángulos
- Multiplicación por matrices

Norma y longitud de un vector

- La **longitud** o **norma** de un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ es un escalar no negativo $\|\mathbf{v}\|$ definido como:

$$\|\mathbf{v}\| \triangleq \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}; \text{ y } \|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

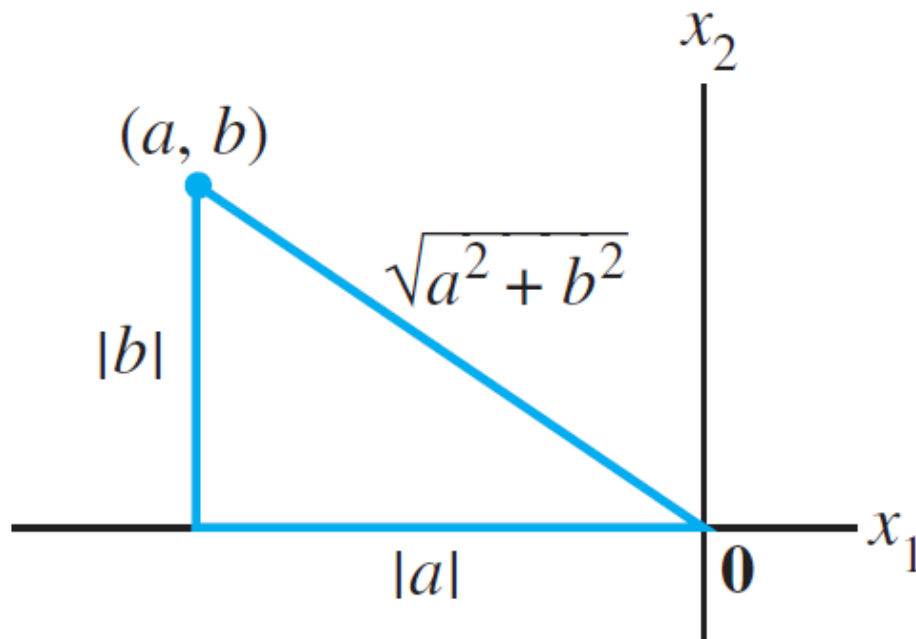
- En el caso particular de trabajar con el producto escalar anteriormente presentado, esta definición se reduce a:

$$\|\mathbf{v}\| \triangleq \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$$

que es conocida como **norma Euclídea del vector $\mathbf{v}$** .

Norma y longitud de un vector

- En particular para $\mathbb{R}^2$, si tenemos $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ e identificamos $\mathbf{v}$ con un punto geométrico en el plano, entonces $\|\mathbf{v}\|$ coincide con la longitud del segmento desde el origen hasta $\mathbf{v}$ (Teorema de Pitágoras)



Propiedades

$$\|-\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$$

$$\|c \mathbf{v}\| = |c| \|\mathbf{v}\|$$

Norma y longitud de un vector

Ejemplos

$$\|(3, 7)\| = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{58} = 7,6158$$

$$\|(-2, 5)\| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29} = 5,3852$$

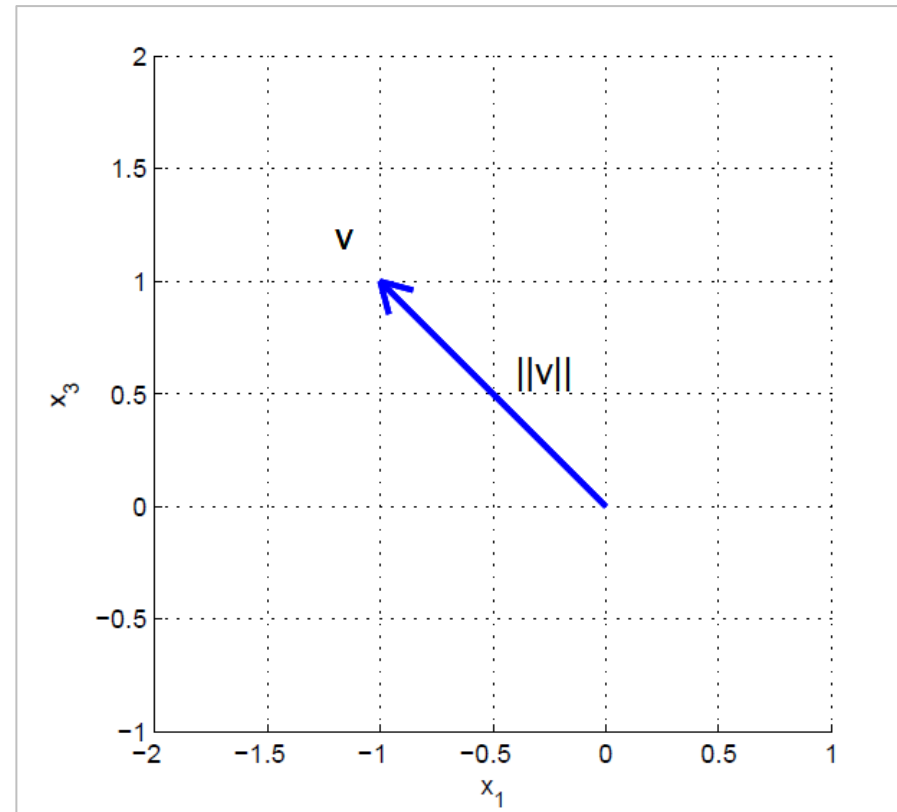
$$\|(-1, 0, 1)\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1,4142$$

Octave

```
norm([3; 7])
```

```
norm([-2; 5])
```

```
norm([-1; 0; 1])
```



Vectores unitarios

- Un vector **v** es unitario si y sólo si $\|v\| = 1$

Ejemplos

$$\mathbf{u} = (1, 0)$$

$$\mathbf{v} = (0, 1)$$

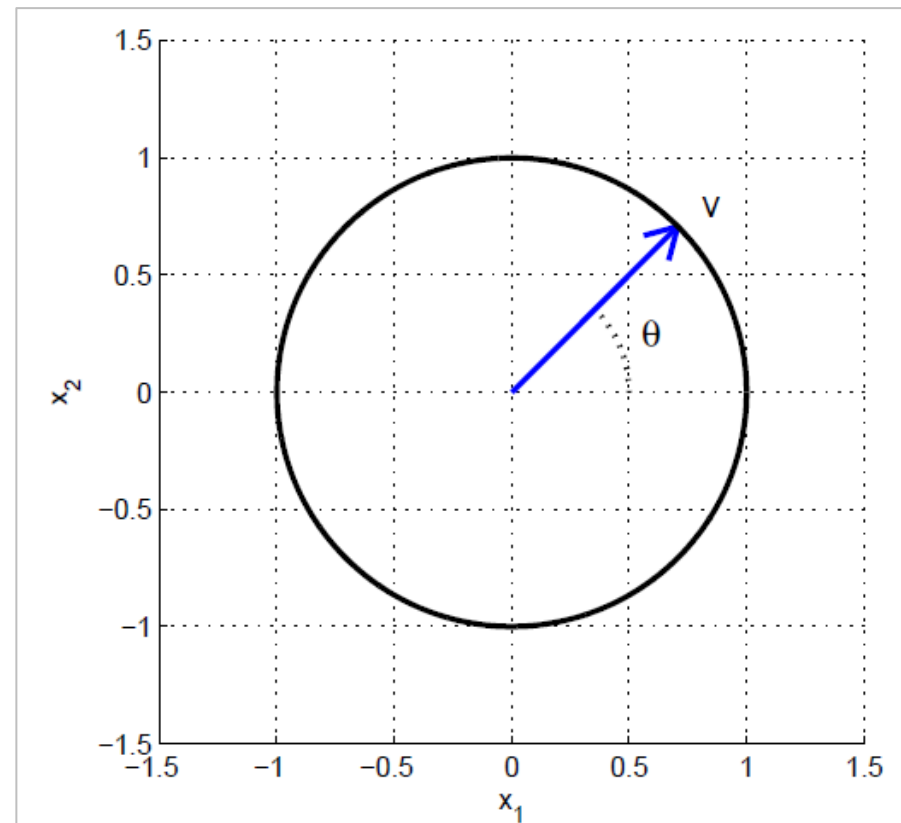
$$\mathbf{w} = (\cos(45^\circ), \sin(45^\circ)) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Octave

```
norm([1; 0])
```

```
norm([0; 1])
```

```
norm([cos(pi/4), sin(pi/4)])
```



Construcción de un vector unitario (normalización)

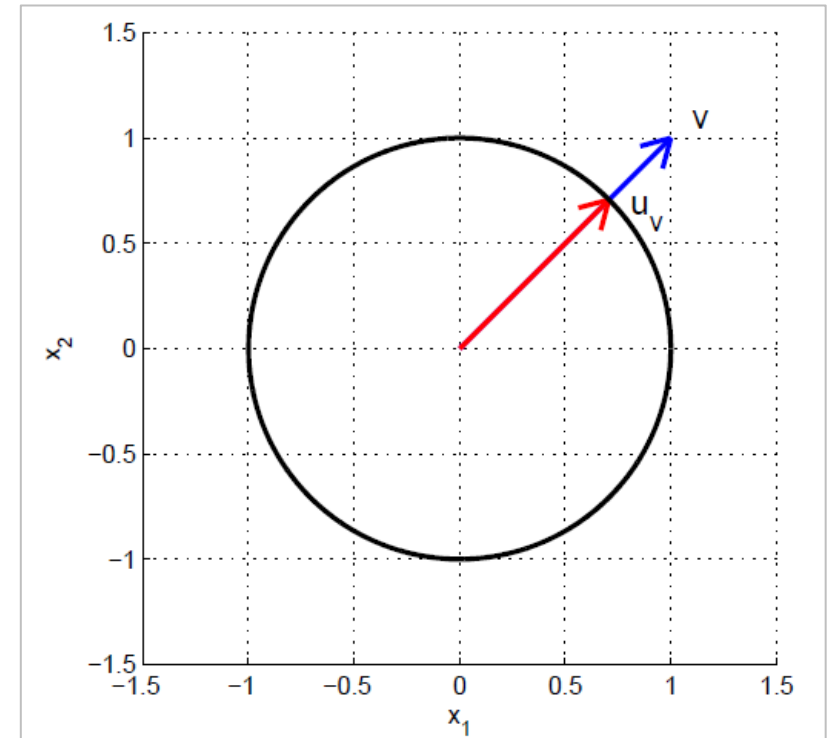
- Dado un vector $\mathbf{v}$ (cuya norma no es nula), siempre se puede construir un vector unitario con la misma dirección de $\mathbf{v}$ dividiendo el vector por su longitud (es decir, multiplicando el vector por $1/||\mathbf{v}||$)

$$\mathbf{u}_{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||}$$

Ejemplo

$$\mathbf{v} = (1, 1)$$

$$\mathbf{u}_{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||} = \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$



Construcción de un vector unitario (normalización)

Ejemplos

Dado el vector $\mathbf{v} = (1, -2, 2, 0)$, encontrar el vector unitario $\mathbf{u}$ en la misma dirección que $\mathbf{v}$

Solución:

Primero calculamos la longitud de $\mathbf{v}$:

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = (1)^2 + (-2)^2 + (2)^2 + (0)^2 = 9 \quad ; \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{9} = 3$$

Después multiplicamos el vector $\mathbf{v}$ por $1/\|\mathbf{v}\|$, obteniendo:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v} = \frac{1}{3} \mathbf{v} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para comprobar que $\|\mathbf{u}\| = 1$, es suficiente con comprobar que $\|\mathbf{u}\|^2 = 1$

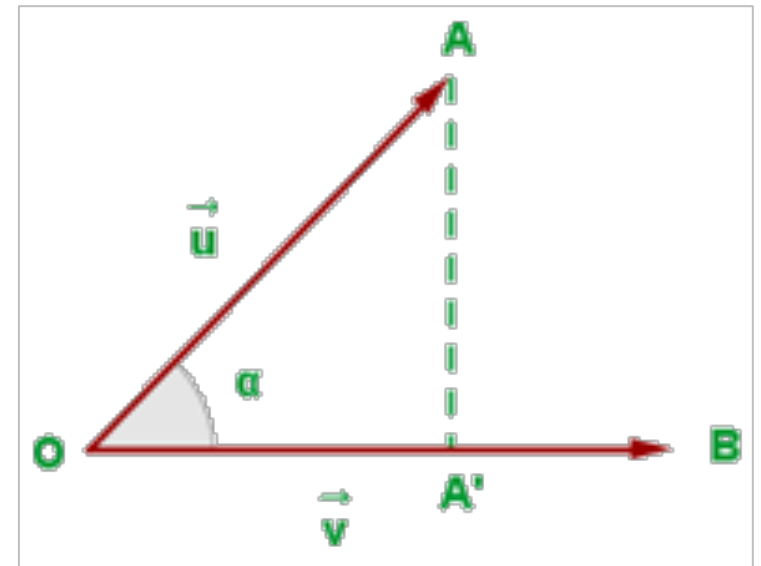
$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|^2 &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + (0)^2 \\ &= \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + 0 = 1 \end{aligned}$$

Interpretación geométrica del producto escalar

- El **producto escalar** de dos vectores no nulos, es igual a la norma de uno de ellos por la proyección del otro sobre él
- También puede verse como el producto de las normas por el coseno del ángulo que forman los 2 vectores

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\|\mathbf{OA}'\|}{\|\mathbf{u}\|}$$



Índice de contenidos

- Vectores y operaciones básicas
- Combinaciones lineales
- Producto escalar – interior – interno – punto
- Norma, Longitud de un vector y vectores unitarios
- Distancias y ángulos
- Multiplicación por matrices

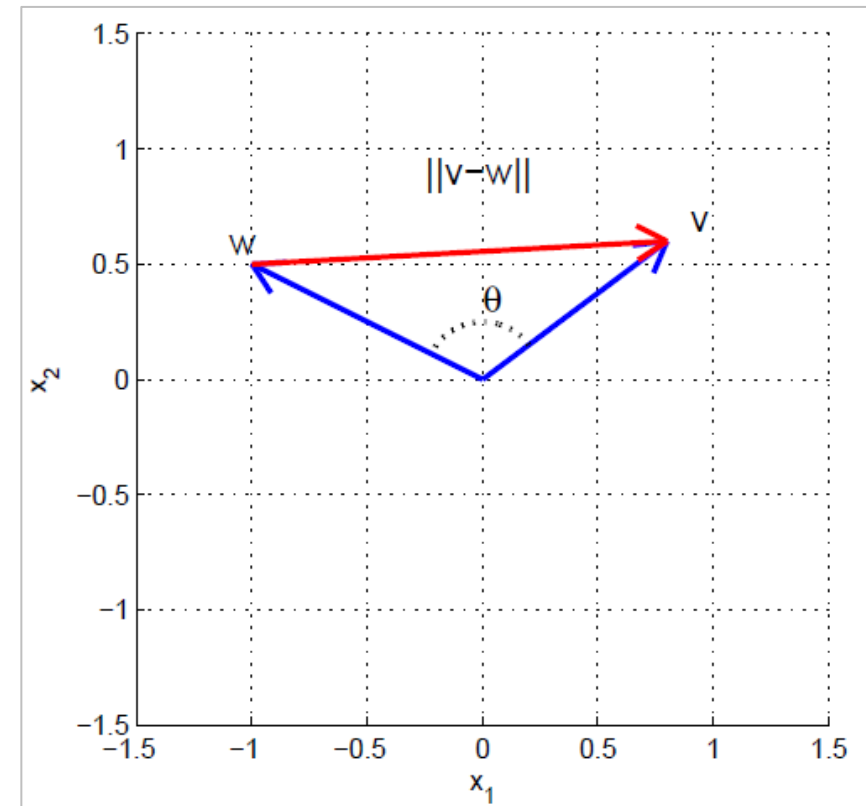
Distancia entre vectores

- Dados dos vectores **v** y **w**, la **distancia** entre ambos se define como:

$$d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \triangleq \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$$

y **ángulo** que forman entre ellos es:

$$\angle(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \triangleq \arccos \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|} = \theta$$



Vectores ortogonales

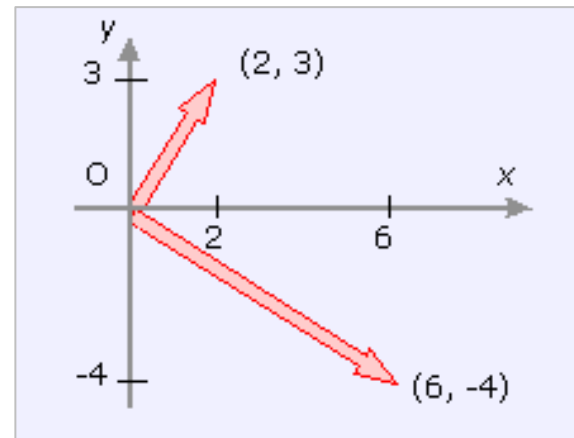
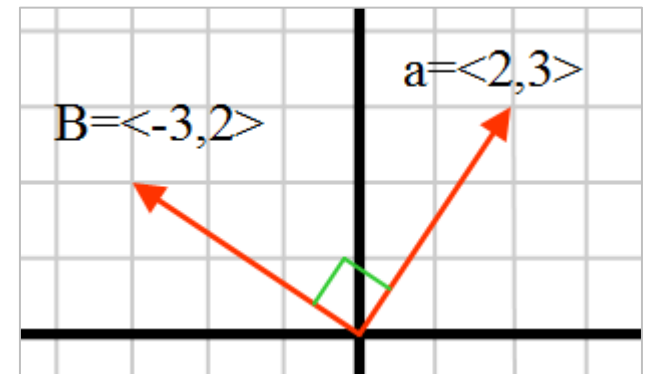
- Dos vectores son **ortogonales** (perpendiculares) si y sólo si su **producto escalar es igual a 0**

- Se representa como:

$$\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$$

- En este caso,

$$\angle(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{\pi}{2}$$



Distancia y ángulos entre dos vectores

Ejemplo

Dados $\mathbf{v} = \left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$ y $\mathbf{w} = \left(1, \frac{2}{3}\right)$. Calcular el ángulo formado entre los dos vectores.

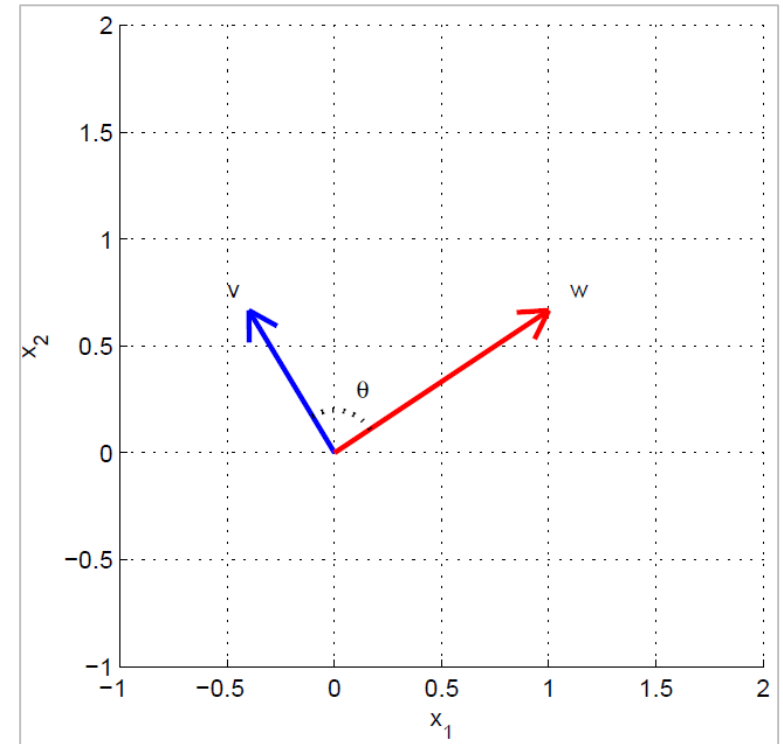
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{45} = 0,0444$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{136}}{15} = 0,7775$$

$$\|\mathbf{w}\| = \sqrt{(1)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{3} = 1,2019$$

$$\angle(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \arccos\left(\frac{\frac{2}{45}}{\frac{\sqrt{136}}{15} \cdot \frac{\sqrt{13}}{3}}\right) = \mathbf{87,27^\circ}$$

Por lo tanto, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son casi ortogonales



Distancia y ángulos entre dos vectores

Ejemplo

Dados $\mathbf{v} = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1)$ y $\mathbf{w} = (0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0)$.

Estos dos vectores en un espacio de 10 dimensiones son ortogonales porque:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$$

Distancia y ángulos entre dos vectores

Ejemplo

Buscar un vector que sea ortogonal a $\mathbf{v} = \left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$

Solución:

Buscamos un vector $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ ortogonal a $\mathbf{v}$, es decir,

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0 = \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot w_1 + \frac{2}{3} \cdot w_2 \Rightarrow w_2 = \frac{3}{5} \cdot w_1$$

Por tanto, cualquier vector de la forma $\mathbf{w} = (w_1, \frac{3}{5} w_1) = w_1(1, \frac{3}{5})$ es perpendicular a $\mathbf{v}$.

Esta es la línea que pasa por el origen y con dirección $(1, \frac{3}{5})$.

En particular, para $w_1 = \frac{2}{3}$, tenemos que $\mathbf{w} = (\frac{2}{3}, \frac{2}{5})$, y para $w_1 = -\frac{2}{3}$, tenemos que $\mathbf{w} = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{5})$.

Esta es una regla general en 2D. Dado un vector $\mathbf{v} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$, los vectores $\mathbf{w} = (\mathbf{b}, -\mathbf{a})$ y $\mathbf{w} = (-\mathbf{b}, \mathbf{a})$ son ortogonales a $\mathbf{v}$

$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \perp (\mathbf{b}, -\mathbf{a})$
 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \perp (-\mathbf{b}, \mathbf{a})$



Teorema de Pitágoras

$$\text{Si } \mathbf{v} \perp \mathbf{w}, \text{ entonces } \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$$

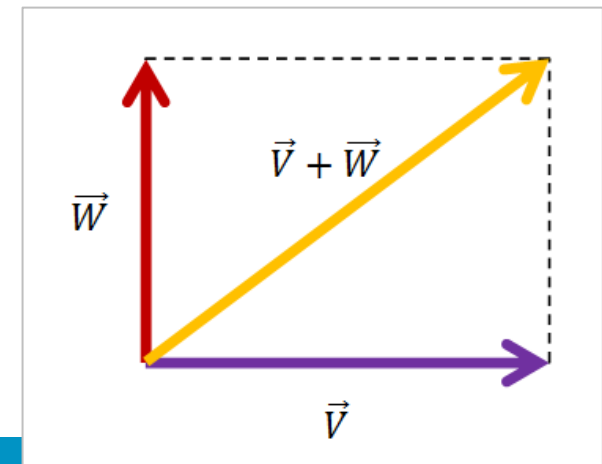
Demostración:

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = (\mathbf{v} + \mathbf{w})^T (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{v}^T \mathbf{v} + \mathbf{v}^T \mathbf{w} + \mathbf{w}^T \mathbf{v} + \mathbf{w}^T \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 + 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$$

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = \langle \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 + 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$$

Pero, como $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$, tenemos que $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$, y en consecuencia,

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$$



Teorema: desigualdad triangular

- Dados dos vectores cualquiera, **v** y **w**, se verifica que:

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$$

Demostración:

Por la definición, sabemos que:

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = (\mathbf{v} + \mathbf{w})^T (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 + 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que:

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 \leq \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| = (\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|)^2$$

Tomando la raíz cuadrada en ambos lados, tenemos:

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$$

Teorema: desigualdad triangular

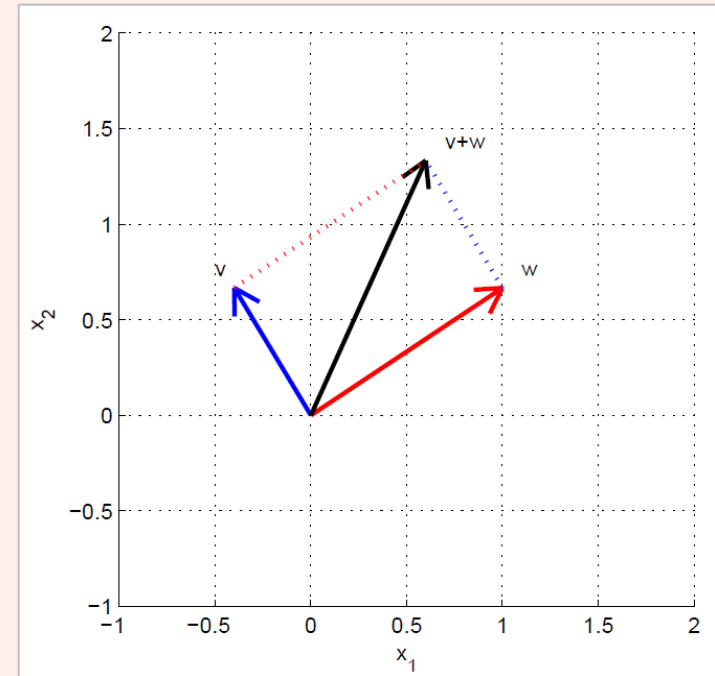
Ejemplo

Dados los vectores $\mathbf{v} = \left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$ y $\mathbf{w} = \left(1, \frac{2}{3}\right)$, sabemos que $\|\mathbf{v}\| = \frac{\sqrt{136}}{15}$, y $\|\mathbf{w}\| = \frac{\sqrt{13}}{3}$

Si verificamos la desigualdad triangular tenemos:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{3}\right) \Rightarrow \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \frac{\sqrt{481}}{15}$$

$$\frac{\sqrt{481}}{15} \leq \frac{\sqrt{136}}{15} + \frac{\sqrt{13}}{3} \Leftrightarrow 1,4621 \leq 1,9793$$



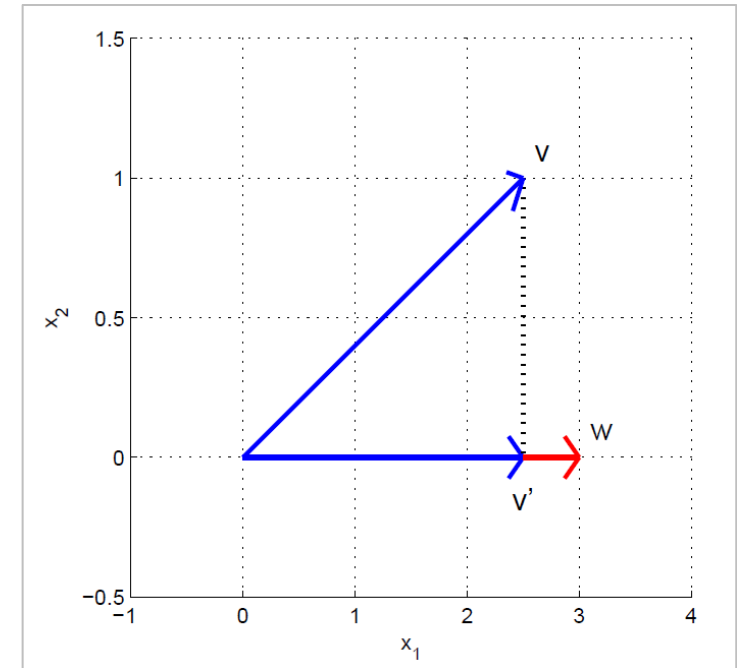
Proyecciones ortogonales

- Consideremos la proyección ortogonal de **v** sobre **w**

$$\mathbf{v}' = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{w}\|} \cdot \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}$$

- La longitud de este vector es:

$$\|\mathbf{v}'\| = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{w}\|}$$



Ejemplo

Dados los vectores de la figura $\mathbf{v} = \left(\frac{5}{2}, 1\right)$ y $\mathbf{w} = (3, 0)$, entonces $\mathbf{v}' = \frac{\frac{5}{2} \cdot 3 + 1 \cdot 0}{3} (1, 0) = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$

Índice de contenidos

- Vectores y operaciones básicas
- Combinaciones lineales
- Producto escalar – interior – interno – punto
- Norma, Longitud de un vector y vectores unitarios
- Distancias y ángulos
- Multiplicación por matrices

Multiplicación por matrices

Ejemplo (como combinación lineal)

Consideremos tres vectores $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Consideremos la combinación lineal:

$$\mathbf{y} = x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + x_3 \mathbf{v}_3 = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{pmatrix}$$

Se puede obtener el mismo resultado construyendo una matriz:

$$A = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Haciendo la multiplicación, tenemos:

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{pmatrix}$$

Multiplicación por matrices

Ejemplo (como productos escalares)

Se puede obtener el mismo resultado calculando $\mathbf{y}$ como el producto escalar de las filas de la matriz A por los valores del vector

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \langle (1, 0, 0), (x_1, x_2, x_3) \rangle \\ \langle (-1, 1, 0), (x_1, x_2, x_3) \rangle \\ \langle (0, -1, 1), (x_1, x_2, x_3) \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{pmatrix}$$

Multiplicación por matrices

Multiplicación de matrices como una combinación lineal

Regla general: una multiplicación de matrices se puede ver como una combinación lineal de las columnas de la matriz

$$A = (\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \dots \ \mathbf{c}_p) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^p x_i \mathbf{c}_i$$

Multiplicación de matrices como productos escalares o punto

Una multiplicación de matrices se puede ver como el producto escalar o punto de los valores del vector con las filas de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1^T \\ \mathbf{r}_2^T \\ \dots \\ \mathbf{r}_n^T \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{x} \rangle \\ \langle \mathbf{r}_2, \mathbf{x} \rangle \\ \dots \\ \langle \mathbf{r}_n, \mathbf{x} \rangle \end{pmatrix}$$

Propiedades

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$$

$$A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u})$$