



CEU

*Universidad
San Pablo*

Tema 4: Espacios vectoriales

Curso 2016/2017

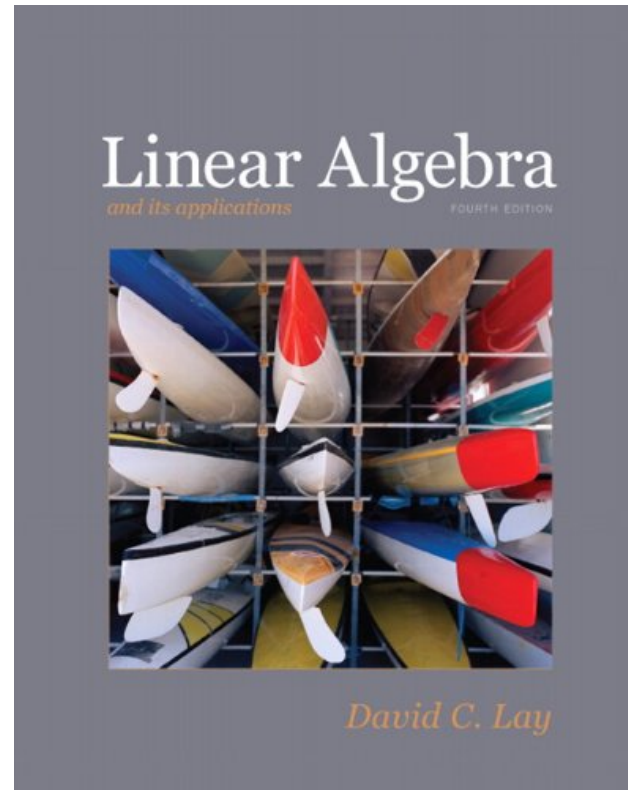
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Madrid

Referencias



Lay D. *Linear algebra and its applications* (4th ed).

Chapter 4.6

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99



CEJ

Índice de contenidos

- Espacio vectorial \mathbb{R}^n y sus subespacios
- Espacio Nulo y espacio Columna de una matriz
- Bases
- Espacio vectorial con el producto interior

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Espacio vectorial

Definición: Espacio vectorial

Un **espacio vectorial** es un conjunto no vacío, V , de objetos (llamados *vectores*) en el que definimos 2 operaciones: la **suma** entre vectores y la **multiplicación por un escalar**, y que $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ y $\forall c, d \in \mathbb{K}$ se verifica que:

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
4. $\exists \mathbf{0} \in V \mid \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
5. $\forall \mathbf{u} \in V \exists ! \mathbf{w} \in V \mid \mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$ (*normalmente escrito como $\mathbf{w} = -\mathbf{u}$*)
6. $c\mathbf{v} \in V$
7. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$
8. $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$
9. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

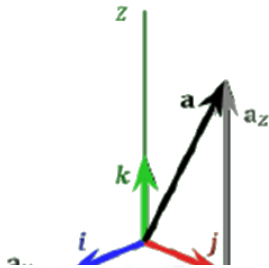
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Espacio vectorial

Teorema: otras propiedades

11. $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$
12. $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$
13. $-\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u}$

Ejemplo: \mathbb{R}^n



\mathbb{R}^n es un espacio vectorial de dimensión finita para cualquier n . Igual que \mathbb{C}^n

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



CEU

Subespacios de \mathbb{R}^n

Definición: Subespacio de \mathbb{R}^n

$H \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subespacio de \mathbb{R}^n si:

1. $\mathbf{0} \in H$
2. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H, \mathbf{u} + \mathbf{v} \in H \rightarrow H$ está cerrado bajo la suma de vectores
3. $\forall \mathbf{u} \in H, \forall r \in \mathbb{R}, r\mathbf{u} \in H \rightarrow H$ está cerrado bajo la multiplicación por un escalar

Ejemplo: subespacios especiales

Los siguientes 2 conjuntos son subespacios de \mathbb{R}^n :

1. $H = \{\mathbf{0}\}$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Subespacios de \mathbb{R}^n

Ejemplo: Plano

Un **plano** está definido como: $H = \text{Span} \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \} = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 \}$

Este **plano** es un **subespacio de \mathbb{R}^n**

Demostración

1. **Demostrar $\mathbf{0} \in H$** \rightarrow Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

2. **Demostrar $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$** \rightarrow $\mathbf{u} \in H \Rightarrow \mathbf{u} = \lambda_{1u} \mathbf{v}_1 + \lambda_{2u} \mathbf{v}_2$

$$\mathbf{v} \in H \Rightarrow \mathbf{v} = \lambda_{1v} \mathbf{v}_1 + \lambda_{2v} \mathbf{v}_2$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (\lambda_{1u} \mathbf{v}_1 + \lambda_{2u} \mathbf{v}_2) + (\lambda_{1v} \mathbf{v}_1 + \lambda_{2v} \mathbf{v}_2) \\ &= (\lambda_{1u} + \lambda_{1v}) \mathbf{v}_1 + (\lambda_{2u} + \lambda_{2v}) \mathbf{v}_2 \in H \end{aligned}$$

3. **Demostrar $r\mathbf{u} \in H$** \rightarrow $\mathbf{u} \in H \Rightarrow \mathbf{u} = \lambda_{1u} \mathbf{v}_1 + \lambda_{2u} \mathbf{v}_2$

$$r\mathbf{u} = r(\lambda_{1u} \mathbf{v}_1 + \lambda_{2u} \mathbf{v}_2)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

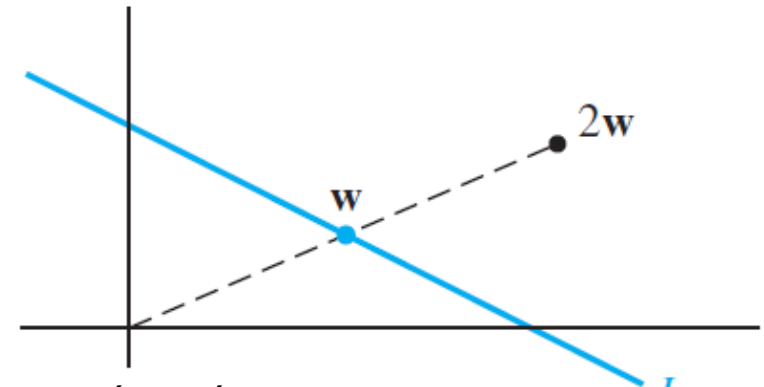
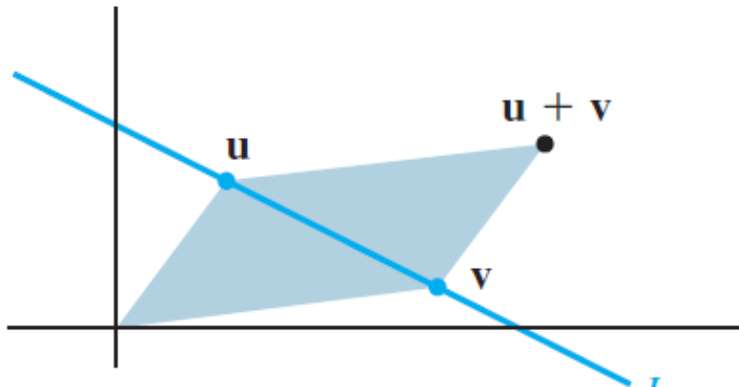
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Subespacios de \mathbb{R}^n

Ejemplo: Recta que no pasa por el origen

Una recta (L) que no pasa por el origen, no es un subespacio, porque

1. $\mathbf{0} \notin L$
2. Si tomamos 2 puntos de la recta (\mathbf{u} y \mathbf{v}), $\mathbf{u} + \mathbf{v} \notin L$
3. Si tomamos un punto de la recta (\mathbf{w}), $2\mathbf{w} \notin L$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

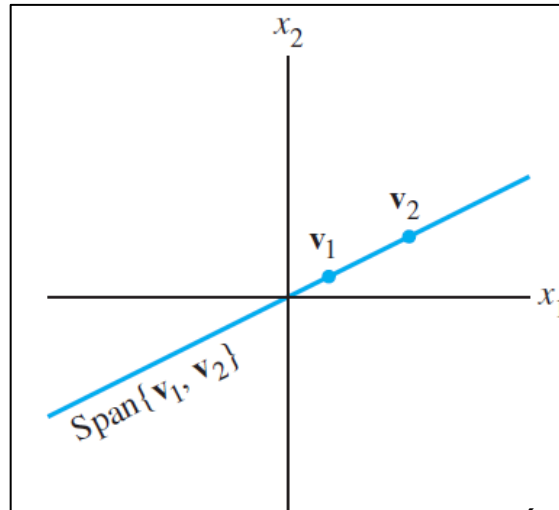
Subespacios de \mathbb{R}^n

Ejemplo: Recta que pasa por el origen

Consideremos \mathbf{v}_1 y $\mathbf{v}_2 = k\mathbf{v}_1$. Entonces,

$$H = \text{Span} \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \} = \text{Span} \{ \mathbf{v}_1 \}$$

es una recta. Es fácil de probar que esta recta es un subespacio de \mathbb{R}^n .



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Subespacio vectorial

Ejemplo

$H = \mathbb{R}^2$ no es un subespacio de \mathbb{R}^3 porque $\mathbb{R}^2 \not\subset \mathbb{R}^3$. Por ejemplo, el vector $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, pero $\mathbf{u} \notin \mathbb{R}^3$.

Ejemplo

$H = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ es un subespacio de \mathbb{R}^3 porque todos los vectores de H son de la forma $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es obvio que H “parece” \mathbb{R}^2 . Esta semejanza es llamada matemáticamente **isomorfismo**.

Ejemplo

Cualquier plano en 3D, que pase por el origen, es un subespacio \mathbb{R}^3 .

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Subespacio generado por un conjunto de vectores

Ejemplo

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ dos vectores de un **espacio vectorial** V . El subconjunto

$$H = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$$

es un **subespacio de** V .

Demostración

Cualquier vector de H es de la forma $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2$ para cualquier $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.

- Demostración a) $0 \in H$

Simplemente estableciendo $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, tenemos $\mathbf{0} \in H$

- Demostración b) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$

$$\text{Sean } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \mathbf{u} = \lambda_{1u} \mathbf{v}_1 + \lambda_{2u} \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v} = \lambda_{1v} \mathbf{v}_1 + \lambda_{2v} \mathbf{v}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Subespacio generado por un conjunto de vectores

Ejemplo (...continuación)

- Demostración c) $cu \in H$

Sea $u \in H \Rightarrow$

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \Rightarrow cu = c(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = c\lambda_1 v_1 + c\lambda_2 v_2 \in H$$

Teorema

Sean $v_1, v_2, \dots, v_p \in V$ p vectores de un espacio vectorial V . El subconjunto

$$H = \text{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$$

es un subespacio de V .

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Subespacio generado por un conjunto de vectores

Ejemplo

Consideremos el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^4 \supset H = \{(a - 3b, b - a, a, b) \forall a, b \in \mathbb{R}\}$
¿Es un subespacio vectorial?

Solución

Todos los **vectores de H** pueden ser escritos como

$$H \ni \mathbf{u} = \begin{bmatrix} a - 3b \\ b - a \\ a \\ b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

\uparrow \uparrow
 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



Subespacio generado por un conjunto de vectores

Ejemplo

Sea $H = \left\{ (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} a - 2b + 5c = d \\ c - a = b \end{array} \right\}$. ¿Es H un subespacio vectorial de \mathbb{R}^4 ?

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



Subespacio generado por un conjunto de vectores

Ejemplo

Sea $H = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{matrix} a - 2b + 5c = d \\ c - a = b \end{matrix}\}$. ¿Es H un subespacio vectorial de \mathbb{R}^4 ?

Solución

Podemos reescribir las condiciones de pertenencia a H como:

$$\begin{matrix} a - 2b + 5c = d \\ c - a = b \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

y, gracias al teorema previo, H es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^4

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Ejercicios

- Tema 5_Enunciados de ejercicios I
 - Ejercicio 4.1.1
 - Ejercicio 4.1.2
 - Ejercicio 4.1.10
 - Ejercicio 4.1.12
 - Ejercicio 4.1.15

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



CEU

Índice de contenidos

- Espacio vectorial \mathbb{R}^n y sus subespacios
- **Espacio Nulo y espacio Columna de una matriz**
- Bases
- Espacio vectorial con el producto interior

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Espacio nulo y espacio columna de una matriz

Definición: Espacio columna de una matriz

Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$. Sean $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^m$ las columnas de la matriz A . El **espacio columna** de A se define como:

$$\text{Col}\{A\} = \text{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

Teorema

$\text{Col}\{A\}$ es un subespacio de \mathbb{R}^m

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Espacio nulo y espacio columna de una matriz

Ejemplo

Encontrar una **matriz A** tal que $\text{Col}\{A\} = \{(6a - b, a + b, -7a) \forall a, b \in \mathbb{R}\}$

Solución

Podemos expresar los puntos de $\text{Col}\{A\}$ como:

$$\text{Col}\{A\} \ni \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6a - b \\ a + b \\ -7a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $\text{Col}\{A\} = \text{Span}\{(6, 1, -7), (-1, 1, 0)\}$. Es decir, estas deben ser las 2 columnas de **A**

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99



Espacio nulo y espacio columna de una matriz

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -4 & 6 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. Determinar si \mathbf{b} pertenece al $\text{Col}\{A\}$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



Espacio nulo y espacio columna de una matriz

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -4 & 6 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. Determinar si \mathbf{b} pertenece al $\text{Col}\{A\}$.

Solución:

Si $\mathbf{b} \in \text{Col}\{A\}$ deberán existir unos coeficientes x_1 , x_2 y x_3 tales que:

$$\mathbf{b} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3$$

Para encontrar esos coeficientes, resolvemos el sistema de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & 3 \\ -4 & 6 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & 6 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & 3 \\ 0 & -6 & -18 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



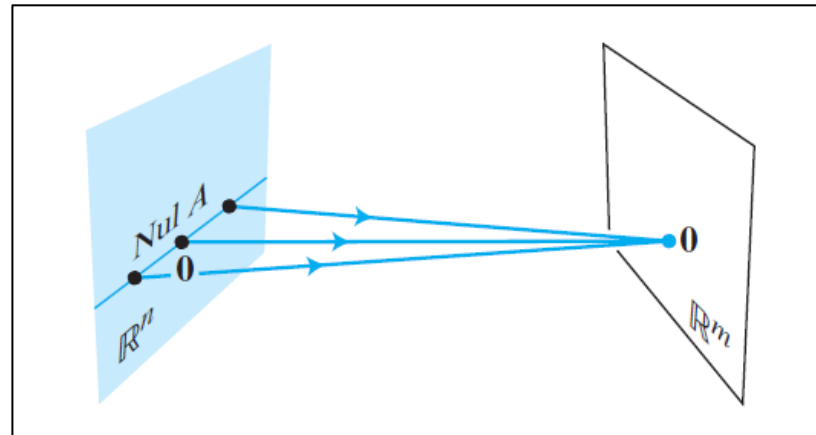
CEU

Espacio nulo y espacio columna de una matriz

Definición: Espacio nulo de una matriz

Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$. El **espacio nulo** de A se define como:

$$\text{Nul}\{A\} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$$



Ejemplo

Cartagena99

(1 -3 -2)
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Espacio nulo y espacio columna de una matriz

Ejemplo (...continuación)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -5 & 9 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\text{Nul}\{A\} = \left\{ \left(-\frac{5}{2}x_3, -\frac{3}{2}x_3, x_3 \right) \forall x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

El ejemplo previo ($\mathbf{x} = (5, 3, -2)$) es el punto obtenido para $x_3 = -2$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Espacio nulo y espacio columna de una matriz

Teorema

$\text{Nul}\{A\}$ es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n

Demostración

Es obvio que $\text{Nul}\{A\} \subseteq \mathbb{R}^n$ porque A tiene n columnas

- Demostración a) $\mathbf{0} \in \text{Nul}\{A\}$

$$A\mathbf{0}_n = \mathbf{0}_m \Rightarrow \mathbf{0}_n \in \text{Nul}\{A\}$$

- Demostración b) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \text{Nul}\{A\}$

$$\text{Sean } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \text{Nul}\{A\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A\mathbf{u} = \mathbf{0} \\ A\mathbf{v} = \mathbf{0} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \text{Nul}\{A\}$$

- Demostración c) $c\mathbf{u} \in \text{Nul}\{A\}$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



CEU

Comparación entre espacio nulo y espacio columna

Contrast Between Nul A and Col A for an $m \times n$ Matrix A

Nul A	Col A
1. Nul A is a subspace of \mathbb{R}^n .	1. Col A is a subspace of \mathbb{R}^m .
2. Nul A is implicitly defined; that is, you are given only a condition ($A\mathbf{x} = \mathbf{0}$) that vectors in Nul A must satisfy.	2. Col A is explicitly defined; that is, you are told how to build vectors in Col A .
3. It takes time to find vectors in Nul A . Row operations on $[A \ \mathbf{0}]$ are required.	3. It is easy to find vectors in Col A . The columns of A are displayed; others are formed from them.
4. There is no obvious relation between Nul A and the entries in A .	4. There is an obvious relation between Col A and the entries in A , since each column of A is in Col A .
5. A typical vector \mathbf{v} in Nul A has the property that $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$.	5. A typical vector \mathbf{v} in Col A has the property that the equation $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ is consistent.
6. Given a specific vector \mathbf{v} , it is easy to tell if \mathbf{v} is in Nul A . Just compute $A\mathbf{v}$.	6. Given a specific vector \mathbf{v} , it may take time to tell if \mathbf{v} is in Col A . Row operations on $[A \ \mathbf{v}]$ are required.
7. Nul $A = \{\mathbf{0}\}$ if and only if the equation	7. Col $A = \mathbb{R}^m$ if and only if the equation

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



- Tema 3_Enunciados de ejercicios VII
 - Ejercicio 2.8.1
 - Ejercicio 2.8.2
 - Ejercicio 2.8.5
 - Ejercicio 2.8.8
 - Ejercicio 2.8.10

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Índice de contenidos

- Espacio vectorial \mathbb{R}^n y sus subespacios
- Espacio Nulo y espacio Columna de una matriz
- **Bases**
- Espacio vectorial con el producto interior

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Base de un subespacio

Definición: Base de un subespacio

Sea $H \subseteq \mathbb{R}^n$. El conjunto de vectores B es una **base de H** si:

1. Todos los **vectores en B** son **linealmente independientes**
2. **$H = \text{Span}\{B\}$**

Base estándar de \mathbb{R}^n

Sean los vectores:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Base de un subespacio

Ejemplo

Sea $H = \text{Span}\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \}$ con $\mathbf{v}_1=(0, 2, -1)$, $\mathbf{v}_2=(2, 2, 0)$, $\mathbf{v}_3=(6, 16, -5)$. Encontrar una base para H

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Base de un subespacio

Ejemplo

Sea $H = \text{Span}\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \}$ con $\mathbf{v}_1=(0, 2, -1)$, $\mathbf{v}_2=(2, 2, 0)$, $\mathbf{v}_3=(6, 16, -5)$. Encontrar una base para H

Solución

Todos los vectores en H son de la forma:

$$H \ni \mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

Nos damos cuenta que $\mathbf{v}_3 = 5\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2$, por lo tanto, \mathbf{v}_3 es redundante:

$$\begin{aligned} H \ni \mathbf{x} &= c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3(5\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2) \\ &= (c_1 + 5c_3)\mathbf{v}_1 + (c_2 + 3c_3)\mathbf{v}_2 \\ &= c'_1\mathbf{v}_1 + c'_2\mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Base de un subespacio

Ejemplo

- $\{ (1,0,0), (2,3,0) \}$ es un conjunto de **2 vectores linealmente independientes**. Pero no pueden generar \mathbb{R}^3 porque para eso, necesitamos 3 vectores
- $\{ (1,0,0), (2,3,0), (4,5,6) \}$ es un conjunto de **3 vectores linealmente independientes** que **generan \mathbb{R}^3** , por lo tanto, es una base de \mathbb{R}^3
- $\{ (1,0,0), (2,3,0), (4,5,6), (7,8,9) \}$ es un conjunto de **4 vectores linealmente dependientes** que **generan \mathbb{R}^3** , pero que no son una base

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Bases para $\text{Nul}\{A\}$ y $\text{Col}\{A\}$

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}$. Resolvemos el sistema de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$(A|\mathbf{0}) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

En azul se muestran las **columnas pivote**, de las cuales hemos aprendido que:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_3 &= -2x_4 + 2x_5 \end{aligned} \Rightarrow \text{Nul}\{A\} \ni \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Bases para $\text{Nul}\{A\}$ y $\text{Col}\{A\}$

Ejemplo (...continuación)

$$\text{Nul}\{A\} \ni \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, la **base del $\text{Nul}\{A\}$** es $\{ (2,1,0,0,0), (1,0,-2,1,0), (-3,0,2,0,1) \}$:

$$\text{Nul}\{A\} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Bases para $\text{Nul}\{A\}$ y $\text{Col}\{A\}$

Ejemplo

Si consideramos $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}$ del ejemplo anterior, tenemos que :

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Si llamamos B a la matriz anterior, entonces la **columnas no-pivote** podemos escribirlas como una **combinación lineal de las columnas pivote**:

$$\mathbf{b}_2 = -2\mathbf{b}_1$$

$$\mathbf{b}_4 = -\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_3$$

$$\mathbf{b}_5 = 2\mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_3$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Bases para $\text{Nul}\{A\}$ y $\text{Col}\{A\}$

Ejemplo (...continuación)

Dado que las **operaciones por filas no cambian la dependencia lineal** entre las columnas de una matriz, podemos derivar las mismas relaciones para la **matriz A** :

$$\mathbf{a}_2 = -2\mathbf{a}_1$$

$$\mathbf{a}_4 = -\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_3$$

$$\mathbf{a}_5 = 3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_3$$

Finalmente, la **base del $\text{Col}\{A\}$** es $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$.

$$\text{Col}\{A\} = \text{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\} = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right\}$$

Teorema

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



CEU

Bases para $\text{Nul}\{A\}$ y $\text{Col}\{A\}$

Ejemplo

Encontrar una **base** para el **espacio nulo** de $A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



Bases para $\text{Nul}\{A\}$ y $\text{Col}\{A\}$

Ejemplo

Encontrar una **base** para el **espacio nulo** de $A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$

Solución

El **espacio nulo de A** son todos aquellos **vectores** que satisfacen $Ax = 0$.

$$[A \ 0] \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 - x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ 0 = 0 \end{array}$$

Por lo que, la solución general es (en forma vectorial paramétrica):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = x_2 \mathbf{u} + x_4 \mathbf{v} + x_5 \mathbf{w}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Bases para $\text{Nul}\{A\}$ y $\text{Col}\{A\}$

Ejemplo (...continuación)

El conjunto $B = \{ \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \} = \{ (2,1,0,0,0), (1,0,-2,1,0), (-3,0,2,0,1) \}$ es una base de $\text{Nul}\{A\}$. Por construcción, estos vectores son linealmente independientes.

Ejemplo: Espacio Nulo y sistemas de ecuaciones

Consideremos $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $\{ \mathbf{e}_3 \}$ es una base del $\text{Nul}\{A\}$
- Consideremos $\mathbf{b} = (7, 3, 0)$. La solución general de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es de la forma:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_{\text{Nul}}$$

donde \mathbf{x}_0 es una solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ que no pertenece al $\text{Nul}\{A\}$ y \mathbf{x}_{nul} pertenece al

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Bases para $\text{Nul}\{A\}$ y $\text{Col}\{A\}$

Ejemplo

Encontrar una **base** para el **espacio columna** de $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Solución

De las columnas que **no tienen pivote** de la matriz B , sabemos que:

$$\mathbf{b}_3 = -3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2$$

$$\mathbf{b}_4 = 5\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$$

$$\begin{aligned} \text{Entonces, } \text{Col}\{B\} &= \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 \mid \mathbf{v} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3\mathbf{b}_3 + x_4\mathbf{b}_4 + x_5\mathbf{b}_5 \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 \mid \mathbf{v} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3(-3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2) + \right. \\ &\quad \left. x_4(5\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) + x_5\mathbf{b}_5 \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 \mid \mathbf{v} = x'_1\mathbf{b}_1 + x'_2\mathbf{b}_2 + x_5\mathbf{b}_5 \right\} \end{aligned}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Bases para $\text{Nul}\{A\}$ y $\text{Col}\{A\}$

Ejemplo

Encontrar una **base** para el **espacio columna** de $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & -9 \\ -2 & -2 & 2 & -8 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 11 & -8 \end{bmatrix}$

Solución

Resulta que $A \sim B$ (B del ejemplo anterior). Dado que las operaciones por filas no afectan la relaciones de independencia lineal entre las columnas de la matriz, deberíamos tener que:

$$\mathbf{a}_3 = -3\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2$$

$$\mathbf{a}_4 = 5\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$$

Y, por lo tanto, **Basis** $\{\text{Col}\{A\}\} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5\}$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Base para subespacio

Ejemplo

Sea $H = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{matrix} a - 2b + 5c = d \\ c - a = b \end{matrix}\}$. Encontrar una base para este subespacio.

Podemos reescribir las condiciones de pertenencia a H como:

$$\begin{matrix} a - 2b + 5c = d \\ c - a = b \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 1 & -2 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Las soluciones de $Ax = \mathbf{0}$ son todos los puntos de la forma:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}d - c \\ 2c - \frac{1}{3}d \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Ejercicios

- Tema 5_Enunciados de ejercicios III
 - Ejercicio 4.3.1
 - Ejercicio 4.3.8
 - Ejercicio 4.3.11
 - Ejercicio 4.3.12
 - Ejercicio 4.3.13

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Índice de contenidos

- Espacio vectorial \mathbb{R}^n y sus subespacios
- Espacio Nulo y espacio Columna de una matriz
- Bases
- **Espacio vectorial con el producto interior**

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Espacio vectorial con el producto interior

Definición: Producto interior

El producto interior sobre un espacio vectorial V , es la función $\langle u, v \rangle$ que asigna un número real a cada par de vectores u y v , y cumple:

1. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
2. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
3. $\langle cu, v \rangle = c \langle u, v \rangle$
4. $\langle u, u \rangle \geq 0$ y $\langle u, u \rangle = 0$ si y solo si $u = 0$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



Espacio vectorial con el producto interior

Ejemplo

Demostrar que la ecuación $\langle u, v \rangle = 4u_1v_1 + 5u_2v_2$ es un producto interior.

Demostración:

1. $\langle u, v \rangle = 4u_1v_1 + 5u_2v_2 = \langle v, u \rangle$
2. $\langle u + v, w \rangle = 4(u_1 + v_1)w_1 + 5(u_2 + v_2)w_2 = 4u_1w_1 + 5u_2w_2 + 4v_1w_1 + 5v_2w_2 = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
3. $\langle cu, v \rangle = 4cu_1v_1 + 5cu_2v_2 = c \cdot (4u_1v_1 + 5u_2v_2) = c \langle u, v \rangle$
4. $\langle u, u \rangle = 4u_1^2 + 5u_2^2 \geq 0$ y $\langle u, u \rangle = 0$ si y solo si $u_1 = 0$ y $u_2 = 0$ ($u = 0$)

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



CFU

Espacio vectorial con el producto interior

Ejemplo

Demostrar que la ecuación $\langle u, v \rangle = u_1v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1 + 3u_2v_2$ es un producto interior.

Demostración:

Demostración análoga a la de ejemplo anterior

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



CEU

Espacio vectorial \mathbb{R}^n con el producto escalar

- Dados dos vectores $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, el producto escalar entre ambos se define como:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \triangleq \mathbf{v}^T \mathbf{w} = \sum_{i=1}^n v_i w_i = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n$$

- Este producto cumple las propiedades 1-4 de producto interior (demostración análoga a la de ejemplo anterior)

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Ejercicios

- Tema 5_Enunciados de ejercicios IV
 - Ejercicio 6.7.1
 - Ejercicio 6.7.13
 - Ejercicio 6.7.15

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

