Universidad Rey Juan Carlos

TEORÍA DE LA SEÑAL Y COMUNICACIONES

Señales y Sistemas

Curso 2012/2013

Grado en inenieria en Tecnologías de la Telecomunicación

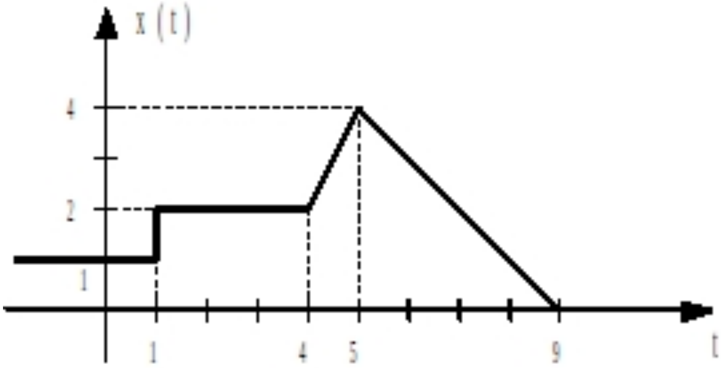
Grado en Ingeniería en Sistemas de Telecomunicación

Grado en Ingeniería en Telemática

EXAMEN FINAL: 7 DE JUNIO DE 2013

PRUEBA REEVALUABLE TEMA 1

Teniendo en cuenta la siguiente señal de tiempo continuo x(t) se pide:



a) Representar gráficamente la señal y(t) = -2 · x(2t + 5) + 1. [0,50 puntos]

b) Calcular la potencia y la energía de la señal z(t)=y(t)·[u(t+3)-u(t+1)]. [0,25 puntos]

c) Calcular y representar la parte impar de z(t). [0,25 puntos]

d) Calcular el periodo de $l(t) = \frac{j-1}{2} \cdot e^{-j10t}$. [0,50 puntos]

e) Calcular la potencia y la energía de *l(t)*. [0,50 puntos]

f) Calcular $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} m(t) \cdot n(-1-t)\, dt$ sabiendo que m(t)=δ(t+2)-δ(t) y que *n(t)=u(-t)*.

[0,50 puntos]

PRUEBA REEVALUABLE TEMA 3

a) Determine la expresión analítica y la representación gráfica de una señal periódica (de periodo π), cuyo valor medio es la unidad y su potencia 3/2, sabiendo que sólo tiene 3 coeficientes del Desarrollo en Serie de Fourier no nulos, que uno de ellos es

$$a_1 = 0.5 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

y que se cumple la relación $\arg\{a_1\} + \arg\{a_{-1}\} = 0$. [0,75 puntos]

b) Sabiendo que $TF\left[e^{-at} \cdot u(t)\right] = \dfrac{1}{a + jw}$ y que $TF\left[u(t+T) - u(t-T)\right] = 2 \cdot \dfrac{sen(Tw)}{w}$, calcular *Z(jw)*, que es la Transformada de Fourier de *z(t) = x(t) · y(t)*, siendo $x(t) = \dfrac{1}{a + jt}$ e $y(t) = \dfrac{sen(2t)}{\pi t}$.

[2 puntos]

c) Calcule la Transformada de Fourier de la siguiente señal, y represente su módulo y fase:

$$h(t) = \frac{sen(7(t-2))}{(t-2)}$$

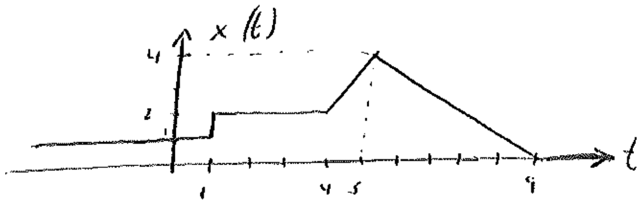
[0,50 puntos]

d) Para $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 0.5\,k)$ siendo la entrada a un SLIT cuya respuesta al impulso es $h(t)$, calcular la salida del sistema en el dominio de la frecuencia, $Y(j\omega)$, y dar una expresión para *y(t)* en el dominio del tiempo.

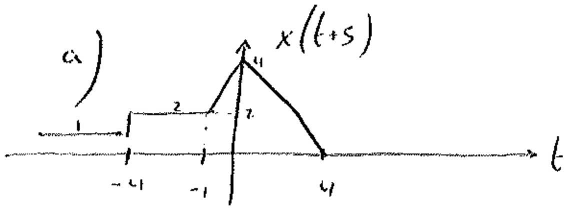
[0,75 puntos]

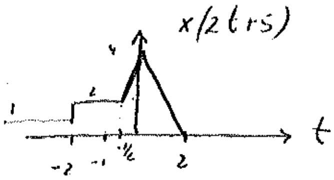
Curso 2012 - 2013

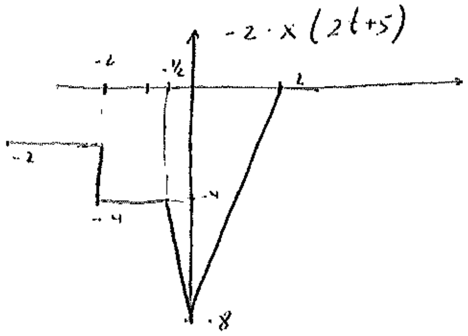
Problema 1.

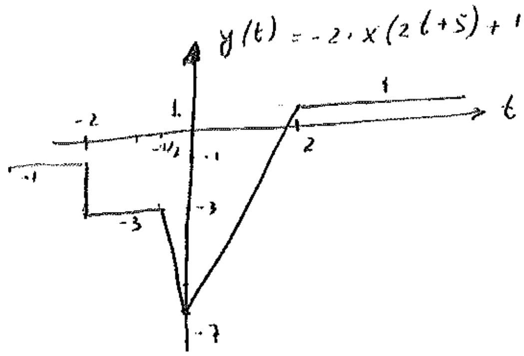


a)

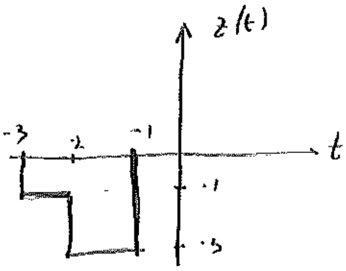








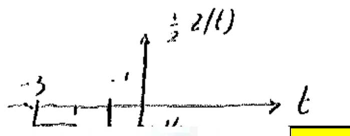
b)

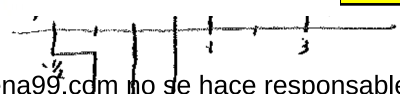


Su potencia es cero por ser una señal limitada en tiempo.

$$E_T = \int_{-\infty}^{\infty} |z(t)|^2 dt = \int_{-3}^{-2} (1)^2 dt + \int_{-2}^{-1} 3^2 dt = 1 + 9 = 10 \text{ J}$$

c)





d) ¿Periodo de $l(t) = \frac{j-1}{2} \cdot e^{-j10t}$?

En el caso continuo, las exponenciales complejas de exponente imaginario puro siempre son periódicas.

$$W_0 = 10 \Rightarrow \frac{2\pi}{T_0} = 10 \Rightarrow \boxed{T_0 = \frac{2\pi}{10}}$$

e) ¿Potencia y energía de $l(t)$?

Por ser periódica su energía es infinita.

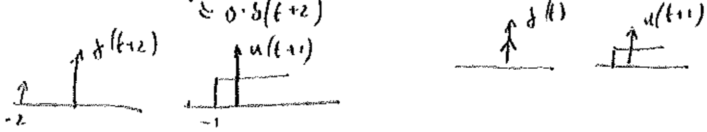
$$P_T = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} |l(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} \left|\frac{j-1}{2}\right| \cdot \underbrace{\left|e^{-j10t}\right|}_{=1} dt$$

$$\boxed{P_T} = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} \frac{\sqrt{2}}{2} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} 1 \cdot dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{T_0}} \cdot \cancel{T_0} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

f)

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t+2) - \delta(t)] \cdot u(-(-1-t))\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t+2) - \delta(t)] \cdot u(t+1)\, dt$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\delta(t+2) \cdot u(t+1)}_{= 0 \cdot \delta(t+2)} dt - \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\delta(t) \cdot u(t+1)}_{1 \cdot \delta(t)} dt = 0 - 1 = -1$$



Problema 2 $\quad y(t) = \operatorname{sen}(t+1) \cdot x(t-1)$

a) ¿Causalidad?

El $\operatorname{sen}(t+1)$ es una función conocida en todos los puntos, luego no afecta a la causalidad.

El sistema es CAUSAL porque sólo utiliza el pasado.

¿Estabilidad?

Si $|x(t)| \le k_x \ \forall t \Rightarrow |x(t-1)| \le k_x \ \forall t$

$\Rightarrow |y(t)| = |\operatorname{sen}(t+1)| \cdot |x(t-1)| \le 1 \cdot |x(t-1)| \le 1 \cdot k_x \le k_x.$

Es ESTABLE

¿Invertible?

El $\operatorname{sen}(t+1)$ vale cero por ejemplo en $t=-1$, luego hace desaparecer información. Busco contraejemplo.

$x_1(t) = \delta(t+2) \Rightarrow y_1(t) = \operatorname{sen}(t+1) \cdot \delta(t-1+2) = \operatorname{sen}(t+1) \cdot \delta(t+1) = 0$

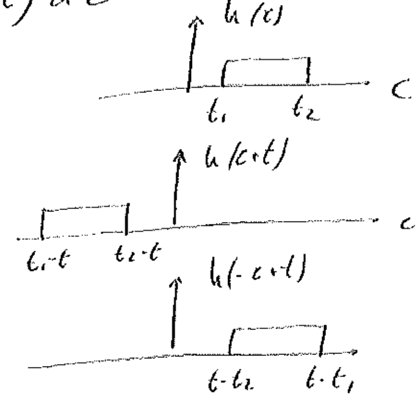
$x_2(t) = -\delta(t+2) \Rightarrow y_2(t) = \operatorname{sen}(t+1) \left[-\delta(t-1+2)\right] = -\operatorname{sen}(t+1) \cdot \delta(t+1) = 0$

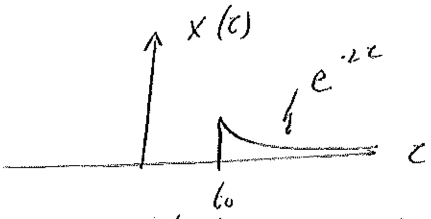
NO INVERTIBLE

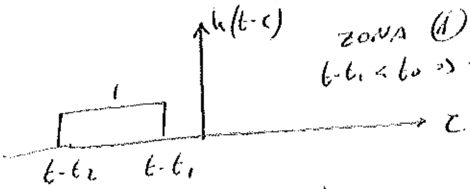
¿Invarianza temporal?

$x(t) \Rightarrow y(t) = \operatorname{sen}(t+1) \cdot x(t-1) \Rightarrow y(t-t_0) = \operatorname{sen}(t-t_0+1) \cdot x(t-t_0-1)$

b) $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau$

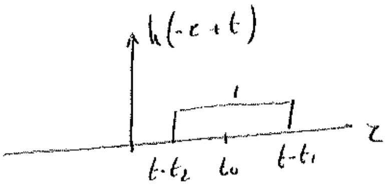






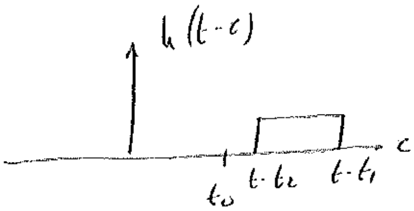
ZONA (1)
$t-t_1 < t_0 \Rightarrow t < t_0+t_1$

$$\boxed{y(t)=0}$$



ZONA (2) $\Rightarrow \left.\begin{matrix} t-t_2<t_0 \\ t-t_1>t_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow t_0+t_1<t<t_0+t_2$

$$\boxed{y(t)=\int_{t_0}^{t-t_1} e^{-2\tau}\,d\tau = -\frac{1}{2}\left[e^{-2(t-t_1)} - e^{-2t_0}\right]}$$

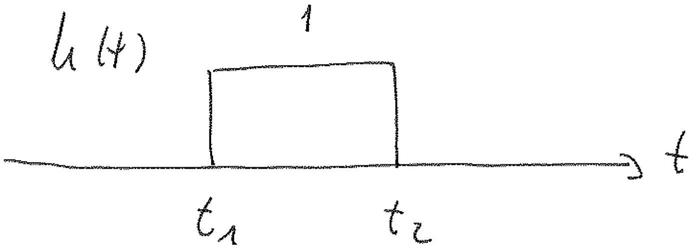


ZONA (3) $\Rightarrow t-t_2>t_0 \Rightarrow t>t_0+t_2$

$$y(t)=\int_{t-t_2}^{t-t_1} e^{-2\tau}\,d\tau = -\frac{1}{2}\, e^{-2\tau}\Big|_{t-t_2}^{t-t_1} = -\frac{1}{2}\left[e^{-2(t-t_1)} - e^{-2(t-t_2)}\right]$$

Agrupando
$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<t_0+t_1 \\ \frac{1}{2}\left[e^{-2t_0} - e^{-2(t-t_1)}\right] & \text{si } t_0+t_1\le t\le t_0+t_2 \\ \frac{1}{2}\left[e^{-2(t-t_2)} - e^{-2(t-t_1)}\right] & \text{si } t>t_0+t_2 \end{cases}$$

(c) $h(t) = u(t-t_1) - u(t-t_2)$, $t_1 < t_2$



Será causal siempre que $t_1 \geq 0$.

Será estable para cualquier valor de t_1 y t_2, ya que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,dt = t_2 - t_1 < \infty .$$

(Se puede precisar que si $t_1 \to -\infty$ o $t_2 \to +\infty$, en ese caso el sistema no es estable).

Será con memoria siempre, ya que es distinto de $A \cdot \delta(t)$.

Problema 3

a) $a_0 = 1$

$x(t) = a_{-1}\cdot e^{j(-1)\cdot\frac{2\pi}{\pi}t} + a_0\cdot\left(\overset{1}{e^{j0\frac{2\pi}{\pi}t}}\right) + a_1\cdot e^{j2t}$

$|a_{-1}|^2+|a_0|^2+|a_1|^2 = \frac{3}{2}$; $\longrightarrow |a_{-1}|^2 = \frac{3}{2} - 1 - \frac{1}{4} = \frac{6-4-1}{4} = \frac{1}{4}$;

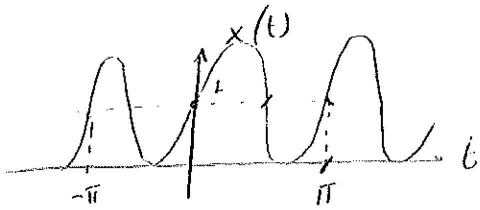
$|a_{-1}| = \frac{1}{2}$

$a_1 = \frac{1}{2}\cdot e^{-j\pi/2} = -\frac{j}{2}$

$a_{-1} = |a_{-1}| e^{j\pi/2} = j\cdot|a_{-1}| \longrightarrow a_{-1} = \frac{j}{2}$

$x(t) = \frac{j}{2}\cdot e^{-j2t} + 1 - \frac{j}{2} e^{j2t}$

$$\boxed{x(t) = 1 - \frac{j}{2}\big(\underbrace{e^{j2t} - e^{-j2t}}_{2j\,sen(2t)}\big) = 1 + sen\,2t}$$



b) $$\boxed{\begin{array}{l} e^{-at}\cdot u(t) \xrightarrow{TF} \frac{1}{a+j\omega} \\ u(t+T) - u(t-T) \xrightarrow{TF} \frac{2\cdot sen(T\omega)}{\omega} \end{array}}$$

-T T

$z(t) = x(t)\cdot y(t)$

$Z(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[X(j\omega) * Y(j\omega)\right]$

$x(t) = \frac{1}{a+jt}$

$y(t) = \frac{sen(2t)}{\pi t}$

aplicando dualidad

$g(t) = e^{-at}\cdot u(t) \longrightarrow f(\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$

$f(t) = \frac{1}{a+jt} \longrightarrow 2\pi\cdot g(-\omega) = 2\pi\cdot e^{a\omega}\cdot u(-\omega)$

$g(t) = u(t+T) - u(t-T) \longrightarrow f(\omega) = 2\cdot\frac{sen(T\omega)}{\omega}$

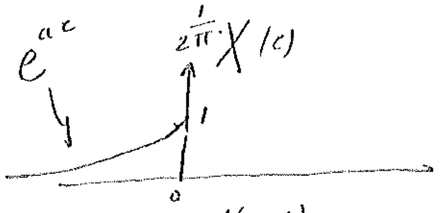
$f(t) = \frac{2\cdot sen(Tt)}{t} \longrightarrow 2\pi\left[u(-\omega+T) - u(-\omega-T)\right]$

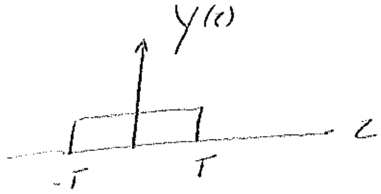
$y(t) = \frac{1}{2\pi}\cdot f(t)$

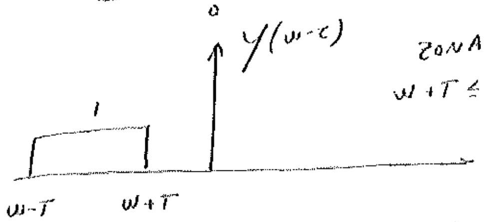
$X(j\omega) = 2\pi\cdot e^{a\omega}\cdot u(-\omega)$

$$Z(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[X(j\omega) * Y(j\omega)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\tau)\, Y(\omega-\tau)\, d\tau$$

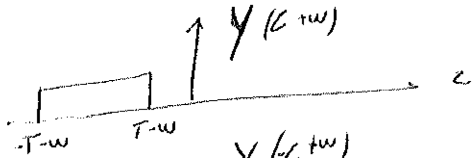


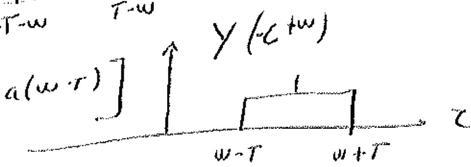




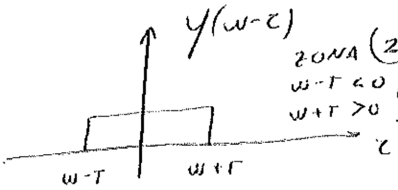
ZONA (1)

$\omega + T \leq 0 \Rightarrow (\omega \leq -T)$





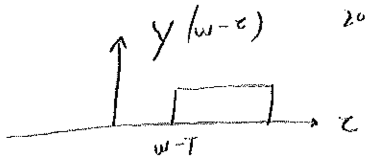
$$Z(j\omega) = \int_{\omega-T}^{\omega+T} e^{a\tau}\, d\tau = \frac{1}{a}\left[e^{a(\omega+T)} - e^{a(\omega-T)}\right]$$



ZONA (2)

$\left.\begin{matrix}\omega - T < 0 \\ \omega + T > 0\end{matrix}\right\} (-T < \omega < T)$

$$Z(j\omega) = \int_{\omega-T}^{0} e^{a\tau}\, d\tau = \frac{1}{a}\left[e^{0} - e^{a(\omega-T)}\right]$$



ZONA (3)

$\omega - T > 0$

$(\omega > T)$

$$Z(j\omega) = 0$$

Agrupando

$$Z(j\omega) = \begin{cases} \frac{1}{a}\left[e^{a(\omega+T)} - e^{a(\omega-T)}\right] & \text{si } \omega \leq -T \\ \frac{1}{a}\left[1 - e^{a(\omega-T)}\right] & \text{si } -T < \omega \leq T \\ 0 & \text{si } \omega > T \end{cases}$$

(c) $h(t) = \dfrac{\text{sen}\,(7(t-2))}{(t-2)} \rightarrow$ (pag. 6)

(d) $x(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 0'5k)$

$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$

$X(j\omega) \quad H(j\omega) \quad Y(j\omega)$

Por Tablas: $\displaystyle\sum_{k} \delta(t - kT_0) \xleftrightarrow{TF} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$

$a_k = 1/T_0 \quad \forall k$

Como $T_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = 2\pi/T_0 = 4\pi \\ a_k = 2 \quad \forall k \end{array} \right\} \Rightarrow$

$X(j\omega) = 2\pi \cdot \displaystyle\sum_{k} 2 \cdot \delta(\omega - k \cdot 4\pi)$