Señales y Sistemas

Curso 2012/2013

Grado en inenieria en Tecnologías de la Telecomunicación

Grado en Ingeniería en Sistemas de Telecomunicación

Grado en Ingeniería en Telemática

EXAMEN FINAL: 7 DE MAYO DE 2013

PRUEBA REEVALUABLE TEMA 1

Sean las señales siguientes, donde $k1 = 0$ y $k2 = 2$:

$$x_1(t) = (-t+2)\big(u(t-1) - u(t-3)\big)\,; \qquad x_2(t) = \sum_{k=k1}^{k2} x_1(t-2k)$$

a) Represente gráficamente $x_1(t)$. Represente gráficamente $x_2(t)$. *[0.75pt]*

b) Calcule la energía de $x_1(t)$. *[0.50pt]*

c) Calcule la potencia de $x_3(t) = u(-t)$. *[0.75pt]*

d) ¿Es $x_2(t)$ una señal periódica? Argumente su respuesta. *[0.50pt]*

PRUEBA REEVALUABLE TEMA 2

a) Estudie la invarianza temporal y la invertibilidad en el sistema dado por

$$y(t) = x(\,|t|\,)$$ *[0.75pt]*

b) Represente $h(t) = \dfrac{dx_1(t)}{dt}$, donde $x_1(t) = (-t+2)\big(u(t-1) - u(t-3)\big)$.

Si $h(t)$ es la respuesta al impulso de un SLIT, ¿es el sistema estable? ¿Es causal? *[0.75pt]*

PRUEBA REEVALUABLE TEMA 3

a) Sean las señales siguientes, cuando $k1 = -\infty$ y $k2 = +\infty$:

$$x_1(t) = (-t+2)\big(u(t-1) - u(t-3)\big)\ ; \qquad x_2(t) = \sum_{k=k1}^{k2} x_1(t-2k)$$

Represente gráficamente $x_2(t)$.

Represente gráficamente $x(t) = \dfrac{dx_2(t)}{dt}$.

Calcule el Desarrollo en Series de Fourier y la Transformada de Fourier para $x(t)$. *[1.5pt]*

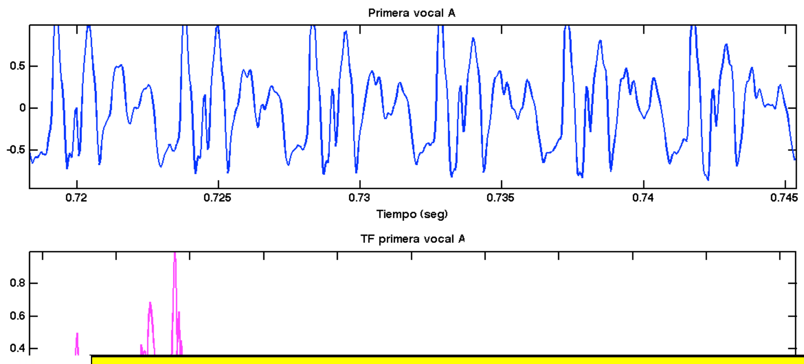
b) Calcule la Transformada de Fourier de la siguiente señal, y represente su módulo y fase:

$$h(t) = \frac{sen\big(7(t-2)\big)}{(t-2)} \qquad [1.25pt]$$

c) Cuando $x(t)$ es la entrada a un SLIT cuya respuesta al impulso es para $h(t)$, ambos siendo los calculados en los apartados (a) y (b), representar gráficamente la salida *y(t)* en el dominio de la frecuencia y dar una expresión para *y(t)* en el dominio del tiempo. *[1.25pt]*

PRUEBA REEVALUABLE DEL LABORATORIO

Sea la señal de la figura, que representa un segmento de voz. A partir del panel inferior, dé una estimación del periodo de dicha señal, razonando su respuesta. *[1pt]*



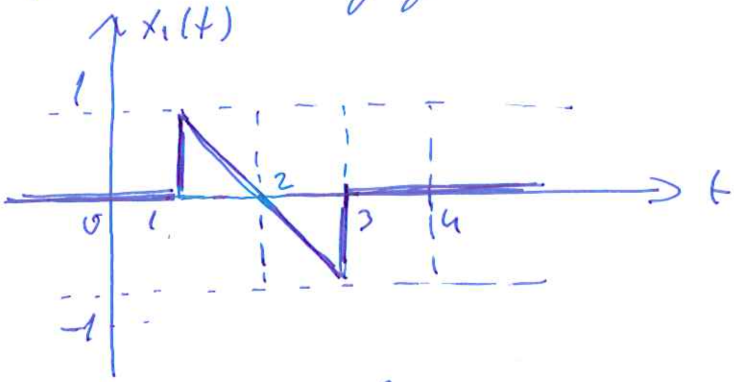
1

PRUEBA 1.

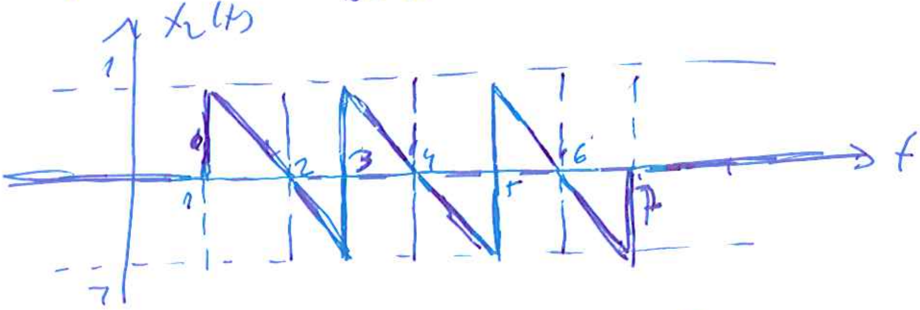
$$x_1(t) = (-t+2)\left[u(t-1) - u(t-3)\right]$$

$$x_2(t) = \sum_{k=0}^{2} x_1(t-2k)$$

(a) Representar ambas gráficamente.



Dado que $x_2(t) = \sum_{k=0}^{2} x_1(t-2k) = x_1(t) + x_1(t-2) + x_1(t-4)$



(b) $E_{x_1} = \int^{+\infty} |x_1(t)|^2 dt = \int^{3} (-t+2)^2 dt = \int^{3} (t^2+4-4t)\, dt$

(c) $\boxed{P_{x_3}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |u(-t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{0} dt =$

$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} [t]_{-T}^{0} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} [0-(-T)] = \boxed{\frac{1}{2} W}$

(d) $x_2(t)$ no es una señal periódica, aunque un fragmento de la señal se repite varias veces, esto no implica que exista T_0 tal que $x(t) = x(t+T_0)$ $\forall t$.

PRUEBA 2

(a) Sistema $y(t) = x(|t|)$

- Invarianza. Utilizamos el procedimiento general.

$x_1(t) \to y_1(t) = x_1(|t|) \to y_1(t-t_0) = x_1(|t-t_0|)$

$\neq$

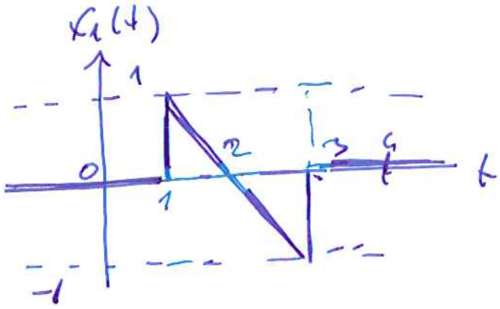
$x_2(t) = x_1(t-t_0) \to y_2(t) = x_2(|t|) = x_1(|t|-t_0)$

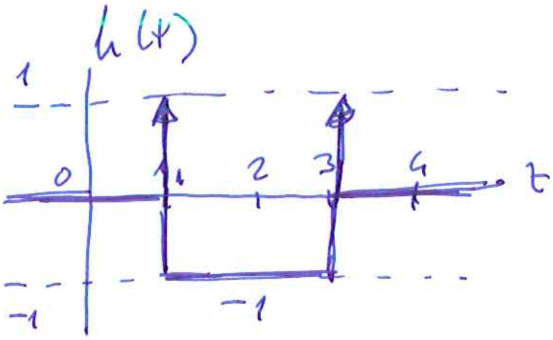
$\Rightarrow$ NO ES INVARIANTE.

- Invertibilidad ¿Donde se destruye información o hay ambigüedad?

$x_1(t) = \delta(t+3) \Rightarrow y_1(t) = 0$ $\Big\} \Rightarrow$ NO INVERTIBLE
$x_2(t) = \delta(t+2) \Rightarrow y_2(t) = 0$

(b) $h(t) = \dfrac{d x_1(t)}{dt}$, donde $x_1(t) = (-t+2)\left[u(t-1) - u(t-3)\right]$



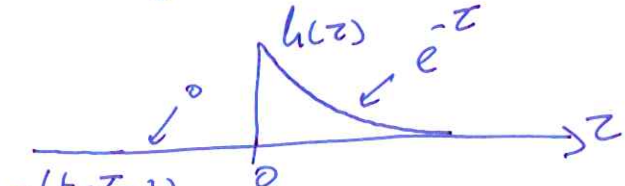


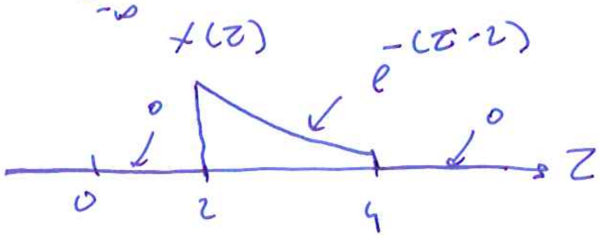
El sistema LTI caracterizado por $h(t)$ es estable, ya que:

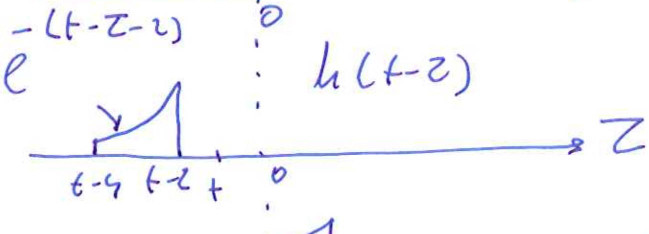
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt = 1 + 1 + 2 = 4 < \infty$$

Es causal, ya que como se ve en la gráfica, $h(t) = 0 \ \forall t < 0$.

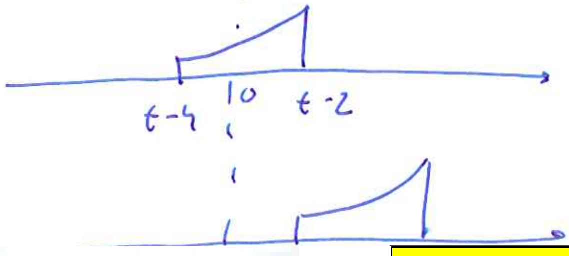
(c) $y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$







① $t-2 < 0 \Rightarrow \underline{t < 2}$



② $t-2 \geq 0$ y $t-4 < 0 \Rightarrow \underline{2 \leq t < 4}$

③ $t-4 \geq 0 \Rightarrow \underline{t \geq 4}$

$- \ \ v \qquad 0 \qquad \ldots \qquad {}_0$

$$= e^{-(t-2)} \left[\tau\right]_0^{t-2} = (t-2)\, e^{-(t-2)}$$

3 $$y(t) = \int_{t-4}^{t-2} e^{-\tau} e^{-(t-\tau-2)}\, d\tau = \dots = e^{-(t-2)} \left[\tau\right]_{t-4}^{t-2} =$$

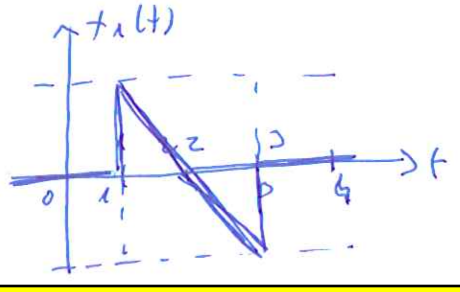
$$= e^{-(t-2)} \left[\cancel{t} - 2 - \cancel{t} + 4\right] = 2 \cdot e^{-(t-2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ (t-2)\, e^{-(t-2)}, & 2 \leq t < 4 \\ 2 \cdot e^{-(t-2)}, & t \geq 4 \end{cases}}$$

PRUEBA 3

(a) $x_1(t) = (-t+2)\left[u(t-1) - u(t-3)\right]$

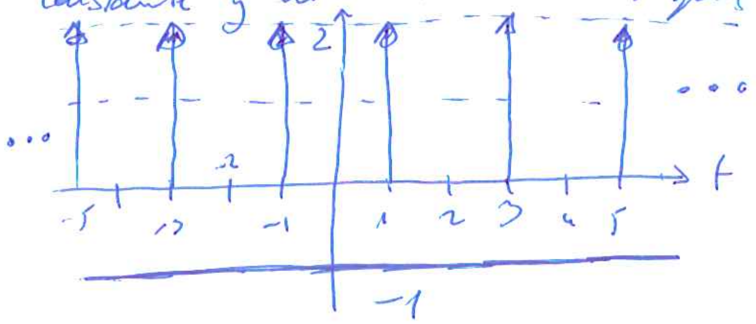
$$x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(t-2k)$$



$x_2(t)$ se construye replicando copias

-1

$x(t) = \frac{dx_2(t)}{dt}$: tengo derivada de una recta con pendiente -1 y de las discontinuidades. Por tanto, $x(t)$ consistirá en una constante y un tren de deltas desplazado.



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-1-2k) - 1$$

DSF: $x(t) = x_a(t) + x_b(t)$. Señales y propiedades en las tablas:

$$v(t) \xleftrightarrow{DSF} v_k$$

$$v(t-t_0) \xleftrightarrow{DSF} v_k \cdot e^{-jk\omega_0 t_0}$$

$$v(t) = 1 \xleftrightarrow{DSF} v_0 = 1; \quad v_k = 0 \ \forall k \neq 0$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT_0) \xleftrightarrow{DSF} a_k = \frac{1}{T_0} \ \forall k$$

Por tanto:

$$x_b(t) = -1 \xleftrightarrow{DSF} b_0 = -1, \quad b_k = 0 \ \forall k \neq 0$$

$$x_a(t) \longleftrightarrow a_k = \frac{1}{2} \cdot e^{-jk\pi} = (-1)^k \frac{1}{2}$$

$$x(t) \xleftrightarrow{DSF} c_k = a_k + b_k$$

La TF de una señal periódica se obtiene de los coeficientes de su DSF:

$$x(t)=x(t+T_0) \xleftrightarrow{TF} X(j\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\,\delta(\omega-k\omega_0)$$

En este caso $T_0=2$ y los coeficientes se denominan c_k, por tanto:

$$\boxed{X(j\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\,\delta(\omega-k\pi)=\pi\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{+\infty}(-1)^k\delta(\omega-k\pi)-\pi\,\delta(\omega)}$$

(b) TF de $h(t)=\dfrac{\operatorname{sen}(7(t-2))}{(t-2)}$

Transformadas y propiedades que pueden ser útiles:

$$v(t)=\frac{\operatorname{sen}(Wt)}{\pi t} \xleftrightarrow{TF} V(j\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<W\\ 0, & |\omega|>W\end{cases}$$

$$z(t-t_0) \xleftrightarrow{TF} e^{-j\omega t_0}Z(j\omega)$$

Por tanto:

$$v(t)=\frac{\operatorname{sen}(7t)}{\ldots} \xleftrightarrow{TF} V(j\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<7\\ \ldots\end{cases}$$

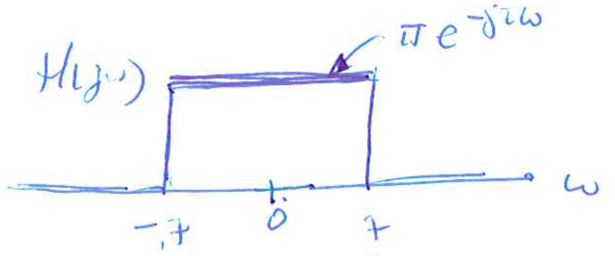
$$\ldots = \frac{\ldots}{(t-2)} \quad \ldots \quad \ldots V(j\omega)=H(j\omega)$$

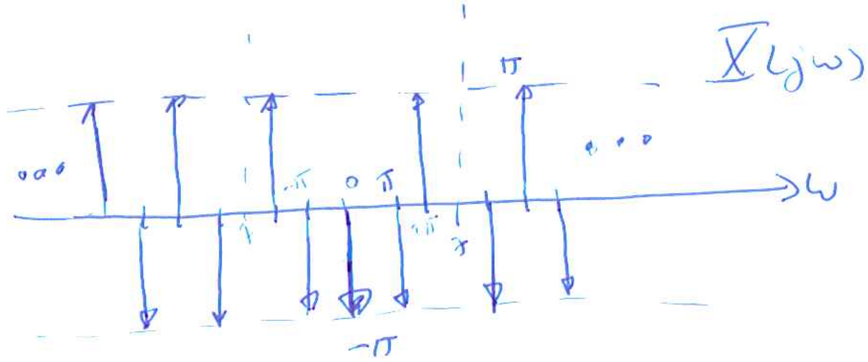
Por tanto: $H(j\omega) = \begin{cases} \pi \cdot e^{-j2\omega}, & |\omega| < 7 \\ 0, & |\omega| \geq 7 \end{cases}$

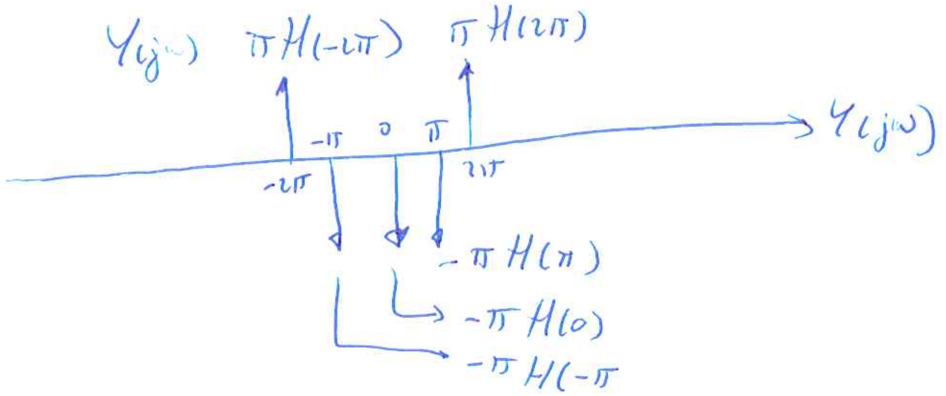
De otra forma:

$$H(j\omega) = \pi e^{-j2\omega} \Pi(\omega/7) = \pi e^{-j2\omega}\left[u(\omega+7) - u(\omega-7)\right]$$

(c)







$H(0) = \pi$

$H(\pi) = \pi e^{-j2\pi} = \pi$

$Y(j\omega) = -\pi^2 \delta(\omega) -$

$= \pi$

Transformadas útiles de las tablas:

$$1 \longleftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega)$$

$$\cos(\omega_0 t) \longleftrightarrow \pi\left(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right)$$

por tanto:

$$y(t) = -\frac{\pi}{2} - \pi\cos(\pi t) + \pi\cos(2\pi t)$$