COMENTARIO MATEMÁTICO

Probemos que

$$\int_0^\infty dq\, e^{-iq^2-qz} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} F\left[\frac{1+i}{\sqrt{2}}\frac{z}{2}\right]$$

$$z = \alpha + i\beta, \quad \alpha > 0$$

donde $F[u]$ es la función de Dawson, es decir, la solución de

$$\frac{dF[u]}{du} = -2u F[u] + 1 \qquad (1,1)$$

$$F[0] = 0$$

Llamemos $f(z)$ a $\int_0^\infty dq\, e^{-iq^2-qz}$.

Como $\left|\frac{d}{dz}\left(e^{-iq^2-qz}\right)\right| \leq q\, e^{-q\alpha}$, que es absolutamente integrable en $(0,\infty)$, se cumple

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\int_0^\infty dq\, e^{-iq^2-qz} = \int_0^\infty dq\, \frac{d}{dz} e^{-iq^2-qz} =$$

$$= \int_0^\infty dq\, -q\, e^{-iq^2-qz} = -\frac{i}{2}\int_0^\infty dq\, \frac{d}{dq}\left(e^{-iq^2}\right) e^{-qz}$$

$$= -\frac{i}{2}\left\{\int_0^\infty dq\, \frac{d}{dq}\left(e^{-iq^2}e^{-qz}\right) - \int_0^\infty dq\, e^{-iq^2}\frac{d}{dq}e^{-qz}\right\} =$$

$$= -\frac{i}{2}\left\{-1 + z\int_0^\infty dq\, e^{-iq^2-qz}\right\} = -\frac{i}{2}\left\{-1 + z f(z)\right\}$$

$$\iff \boxed{\frac{df}{dz} = \frac{i}{2} - \frac{iz}{2} f(z)} \qquad (1,2)$$

Veamos que $f(z) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} F\left[\frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{z}{2}\right]$ satisface (1,2), ya que $F[u]$ satisface, por definición, (1,1):

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{d}{dz} F\left[\frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{z}{2}\right] = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \left.\frac{dF[u]}{du}\right|_{u=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\frac{z}{2}} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1+i}{\sqrt{2}} \left.\left(-2uF[u]+1\right)\right|_{u=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\frac{z}{2}} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{i}{2}\left(-2\frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{z}{2} F\left[\frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{z}{2}\right]+1\right) =$$

$$= \frac{i}{2} - \frac{iz}{2} \underbrace{\frac{(1+i)}{\sqrt{2}} F\left[\frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{z}{2}\right]}_{f(z)} = \frac{i}{2} - \frac{iz}{2} f(z) \quad \text{q.e.d.}$$

Veamos ahora que $\lim_{\alpha \to 0} f(\alpha + i\beta)\Big|_{\beta=0} = 0$

$$f(\alpha) = f(\alpha+i\beta)\Big|_{\beta=0} = \int_0^\infty dq\, e^{-iq^2-q\alpha} \quad \text{ya que } \left|e^{-iq^2-q(\alpha+i\beta)}\right| \le e^{-q\alpha}$$

$$q\alpha = t \quad dq = \frac{dt}{\alpha}$$

$$f(\alpha) = \int_0^\infty dq\, e^{-iq^2-q\alpha} = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty dt\, e^{-i\frac{t^2}{\alpha^2}-t}$$

$$|f(\alpha)| \le \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty dt\, e^{-t} \Rightarrow \lim_{\alpha \to} |f(\alpha)| \le \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\alpha \to 0} f(\alpha) = 0 \Rightarrow f(\alpha + i\beta) \mid f(0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} F\left[\frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{z}{2}\right]$$

Mostremos ahora que

$$F[u] = e^{-u^2} \int_{0,\gamma}^{u} dt\, e^{t^2} \qquad (3.1)$$

donde γ es cualquier curva suave que una 0 y u en el plano complejo.

Obviamente $F(0) = 0$. Ahora bien

$$\frac{dF[u]}{du} = -2u e^{-u^2} \int_{0,\gamma}^{u} dt\, e^{-t^2} + e^{-u^2} e^{u^2} =$$

$$= -2u F[u] + 1 \qquad \text{q.e.d.}$$

$e^{-u^2} \int_{0,\gamma}^{u} dt\, e^{t^2}$ se llama integral de Dawson

(3.1) deja claro que $F[u]$ es una función entera en todo el plano complejo.