

Cálculo de una variable

Funciones y Modelos	2
Sucesiones y series infinitas	34
Integrales	41
Aplicaciones de la integración.....	52
Ecuaciones Diferenciales	58
Bibliografía.....	65



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Funciones y Modelos

Una función f es una regla que asigna a cada elemento x un conjunto D , exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto E .

El conjunto D se llama dominio de la función. El rango de f son todos los posibles valores de $f(x)$ para todo x perteneciente a D .

- Los números del dominio, x , se denominan variable independiente.
- Los números del rango, $f(x)$, se denomina variable dependiente.

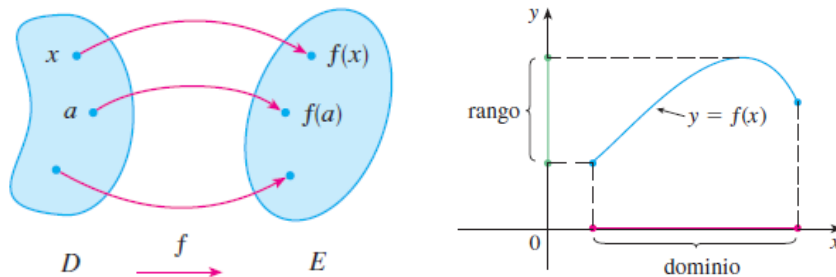


Ilustración 1. Diagrama y gráfica de una función

Prueba recta vertical

Una curva representada en el plano xy es la gráfica de una función x si y solo si ninguna recta vertical cruza más de una vez la curva.

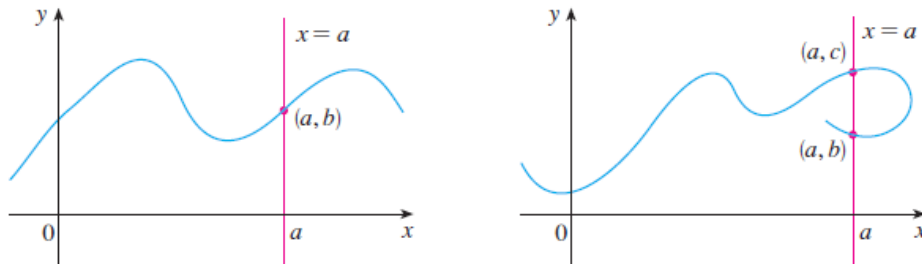


Ilustración 2. A la izquierda gráfica de una función. A la derecha no cumple

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Simetría

Función par: si se cumple que $\forall x \in D \Rightarrow f(-x) = f(x)$. Por ejemplo $y = x^2$

Función impar: si se cumple que $\forall x \in D \Rightarrow f(-x) = -f(x)$. Por ejemplo $y = x^3$

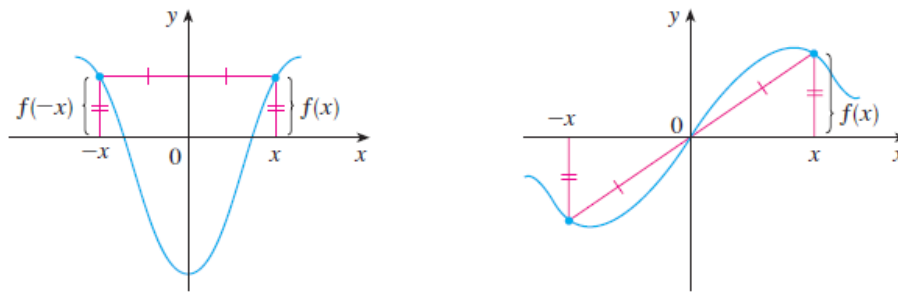


Ilustración 3. A la izquierda función par, a la derecha impar

Crecimiento

Función creciente: f es creciente en un intervalo I si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I

Función decreciente: f es decreciente en un intervalo I si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 > x_2$ en I .

Funciones esenciales. Principales modelos matemáticos

Función lineal: Rectas de la forma $y = f(x) = mx + b$

Polinomios: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

- Si el nolinomio es de grado 1, es una función lineal.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Funciones algebraicas: aquellas que se puede construir usando operaciones algebraicas (p.e. suma, resta, multiplicación, división o toma de raíces), empezando con polinomios.

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \quad g(x) = \frac{x^4 - 16x^2}{x + \sqrt{x}} + (x - 2)^3 \sqrt{x + 1}$$

Funciones trigonométricas: tales como $\sin x$, $\cos x$ que por su naturaleza periódica son aptas para modelar fenómenos repetitivos (ondas, resortes, mareas).

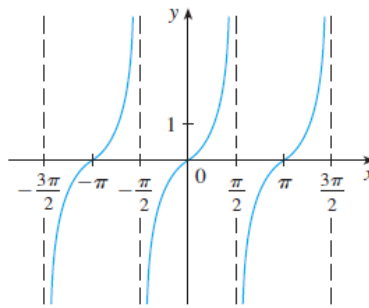
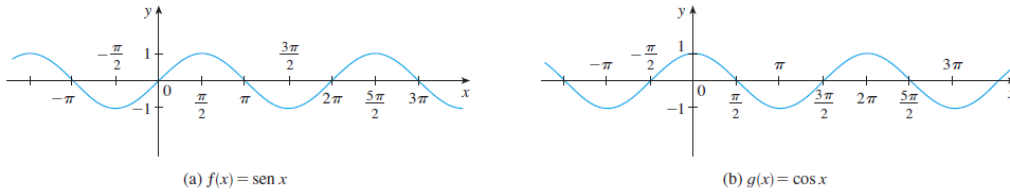


Ilustración 4. Función $y = \tan x$

Función exponencial: función de la forma $f(x) = a^x$ donde a es una constante positiva. Siempre cumple $f(0) = 1$

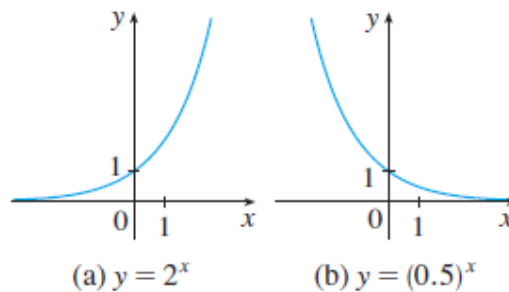


Ilustración 5.- Función exponencial

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

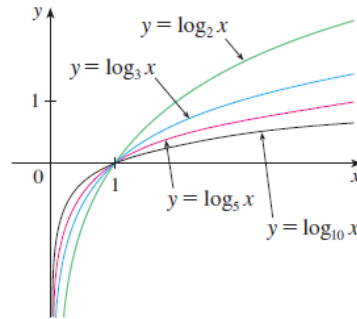


Ilustración 6.- Función logaritmo

Transformación de funciones

Desplazamientos verticales y horizontales: Si $c > 0$ la función $y = f(x) + c$ hace un desplazamiento hacia arriba c unidades, $y = f(x) - c$ hace un desplazamiento hacia abajo c unidades, $f(x - c)$ desplaza la gráfica c unidades a la derecha y $f(x + c)$ desplaza la gráfica c unidades a la izquierda.

Estiramientos: Si $c > 1$, $cf(x)$ estira verticalmente, $\frac{1}{c}f(x)$ contrae verticalmente, $f(cx)$ contrae horizontalmente, $f\left(\frac{x}{c}\right)$ estira horizontalmente, $-f(x)$ refleja alrededor del eje OX, $f(-x)$ refleja alrededor del eje OY.

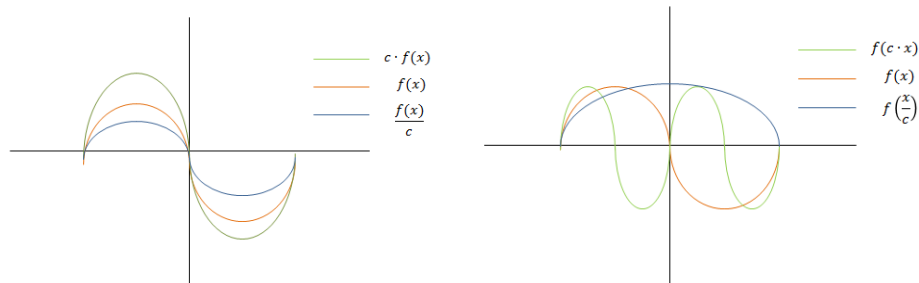


Ilustración 7.- Compresión vertical y horizontal

Combinación de funciones: Una forma de combinar funciones es a través de sumas, restas, productos o divisiones $\Rightarrow f + g, f - g, f \cdot g, f/g$.

La otra forma es por la composición. Dadas dos funciones f y g , la función composición $f \circ g$ (composición de f y g) está definida por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$$f(x) = x^2 \quad f \circ g = f(x-3) = (x-3)^2$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

$$1) a^{x+y} = a^x a^y \quad 2) a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$3) (a^x)^y = a^{xy} \quad 4) (ab)^x = a^x b^x$$

El número e: La selección de una base a está influida por la forma en que la gráfica $y = a^x$ cruza el eje Y.

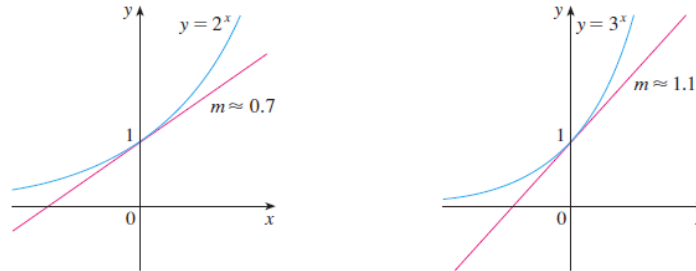


Ilustración 8. Pendientes en (0,1) en distintas funciones exponenciales

Siempre el punto $(0, 1)$ pertenecerá a la curva porque $a^0 = 1$, pero en $y = 2^x$ la pendiente de la recta en $(0, 1)$ vale $\approx 0,7$ y para $y = 3^x$ la pendiente en $(0, 1)$ vale $\approx 1,1$. Hay un número donde la pendiente en $(0, 1)$ vale justo 1 y es $e \approx 2,71828$, lo que implica que para $y = e^x$ pasa por $(0, 1)$ con pendiente $m = 1$.

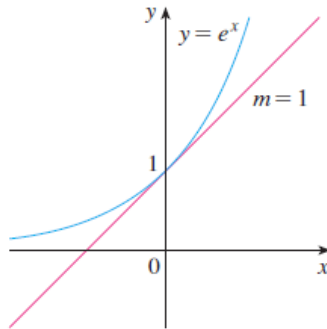


Ilustración 9. En la función e^x la pendiente en $(0,1)$ es 1

Funciones Inversas y logarítmicas.

Definición: Una función f recibe el nombre de función biunívoca si nunca toma el mismo valor dos veces. Esto es si $f(x_1) \neq f(x_2)$ siempre que $x_1 \neq x_2$

Prueba de la recta horizontal: Una función es biunívoca si y solo si no hay una recta horizontal que cruce su gráfica más de una vez.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Definición: Sea f una función biunívoca de dominio A y rango B . Entonces su función inversa f^{-1} tiene dominio B y rango A y está definida por $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

No debemos confundir $f^{-1}(x)$ con $\frac{1}{f(x)}$ que se llama recíproca de $f(x)$. Sí que podemos escribir el recíproco $\frac{1}{f(x)}$ en la forma $[f(x)]^{-1}$

Forma de hallar la función inversa de una función biunívoca f

- Escribir $y=f(x)$. Por ejemplo dado $f(x) = x^3 + 2$ se escribe $y = x^3 + 2$
- Si es posible se despeja x en función de y . En el ejemplo $x = \sqrt[3]{y - 2}$
- Se intercambia x e y . En el ejemplo quedaría $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$

Funciones logarítmicas

La función $\log_a x$ es la inversa de $f(x) = a^x$. Se cumple que $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$.

Cumpléndose que $\log_a a^x = x \quad \forall x \in R$ y $a^{\log_a x} = x \quad \forall x > 0$

Propiedades de los logaritmos:

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a(x^r) = r \log_a x \quad \forall r \in R$

Logaritmo natural: es el logaritmo en base e . Se nota como $\ln x$ y quiere decir que

$\log_e x = \ln x$. Se cumple por tanto que $\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x \Rightarrow \begin{cases} \ln(e^x) = x \\ e^{\ln x} = x \quad \forall x > 0 \end{cases}$ y

$\ln e = 1$

Formula del cambio de base

Se cumple que $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$. Se demuestra teniendo en cuenta que $y = \log_a x \Rightarrow a^y = x$. Tomando logaritmos en la segunda $\ln(a^y) = \ln x \Rightarrow y \ln a = \ln x \Rightarrow y = \frac{\ln x}{\ln a} \Rightarrow \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Gráficas de e^x y $\ln x$

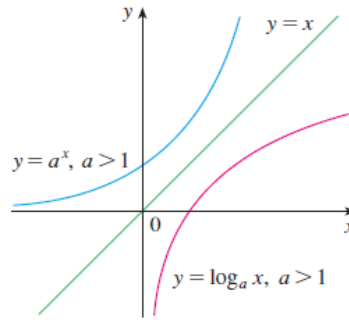


Ilustración 11.- Función exponencial y logaritmo

Curvas paramétricas: son funciones que vienen dadas en $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$

Por ejemplo $\begin{cases} x = \text{sen } t \\ y = \text{cos } t \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = \text{sen}^2 t + \text{cos}^2 t = 1$, una circunferencia radio 1.

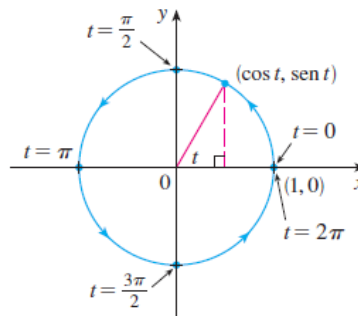


Ilustración 12.- Circunferencia de radio 1

Ejercicio examen parcial Noviembre 2018. Describa el movimiento de una partícula con posición (x, y) de acuerdo a las ecuaciones $\begin{cases} x = 3 + 2 \text{cos}(t) \\ y = 1 + \text{sen}(t) \end{cases}$ cuando t varía en el intervalo $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$.

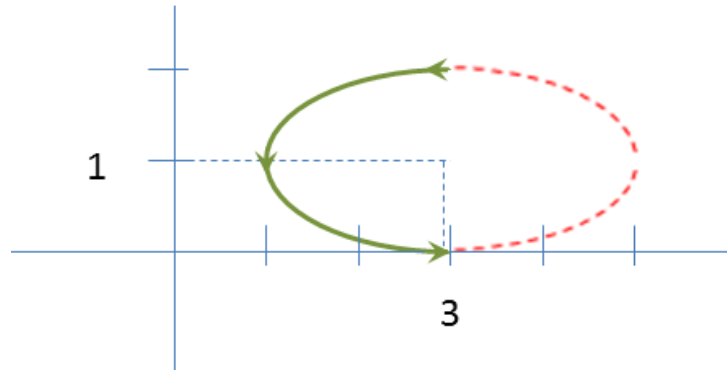
$\text{cos}(t) = \frac{x-3}{2}$ con lo que se tiene $\frac{(x-3)^2}{2^2} + \frac{(y-1)^2}{1^2} = 1$ con lo que se tiene una $\text{sen}(t) = y - 1$
 elipse centrada en el punto $(3, 1)$ y de eje X con una longitud 2 y eje Y con una longitud 1

Los valores que se toman en los intervalos son:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**





Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70