Solución de la prueba de evaluación a distancia del 16 diciembre 2010

1. *Señale el ínfimo del conjunto* $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x^2 \leq 2\}$.

Solución (c)

El conjunto A es

$$A = (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$$

(represéntese gráficamente) por tanto claramente el ínfimo viene dado por

$$\inf A = -\sqrt{2}$$

2. Sea el conjunto $M = \{a, b, c\}$ *y consideremos la ley de composición interna* $\circ$ *definida mediante la siguiente tabla*

∘	a	b	c
a	a∘a=b	a∘b=a	a∘c=a
b	b∘a=c	b∘b=a	b∘c=b
c	c∘a=c	c∘b=b	c∘c=b

Señale la respuesta correcta:

Solución (a)

No existe elemento neutro, de la segunda fila

b∘a=c	b∘b=a	b∘c=b

deducimos que el único candidato es c. Pero c no es elemento neutro ya que $c \circ c = b \neq c$. Como no existe elemento neutro $(M, \circ)$ no puede ser grupo. Tampoco verifica la propiedad conmutativa ya que por ejemplo

$$a \circ b = a \neq c = b \circ a$$

3. Señale el valor del determinante de la matriz

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & 0 & e & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \end{pmatrix}$$

en donde a, b, c, d, e, f *y* g *son parámetros reales arbitrarios.*

Solución (b)

Desarrollamos el determinatne por los elementos de la cuarta columna que tiene todos los elementos nulos exceptuando uno. De esta forma

$$\det M = (-1)^{1+4} d \det \begin{pmatrix} e & 0 & e \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} = -defg$$

4. *Sea B la matriz inversa de la matriz*

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Señale la respuesta correcta:

Solución (b)

Denotemos la matriz por A. Por el teorema de caracterización de la inversa se cálcula directamente

$$b_{12} = \frac{A_2^1}{\det A} = (-1)^{1+2} \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}} = -\frac{1}{3}$$

5. *Sean los subespacios* $\mathbb{E}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$ *y* $\mathbb{E}_2$ *el subespacio generado por el sistema* $\{(0, 1, 0), (1, 1, 0)\}$. *Señale las ecuaciones implícitas del subespacio* $\mathbb{E}_1 \cap \mathbb{E}_2$.

Solución (d)

Las ecuación implícita del subespacio $\mathbb{E}_2$ es $z = 0$. Las ecuaciones de $\mathbb{E}_1 \cap \mathbb{E}_2$ se hallan adjuntando las dos ecuaciones implícitas de los dos subespacios

$$z = 0, \; x - y + z = 0$$

6. Sean $\mathbf{A} = \{u_1, u_2\}$, $\mathbf{B} = \{v_1, v_2\}$ *dos bases de* $\mathbb{R}^2$ *verificando*

$$\mathbf{u}_1 = 5\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$
$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$$

Señale las coordenadas del vector $\mathbf{w} = 6(v_1 + v_2)$ *respecto de la base* $\mathbf{B}$.

Solución (d)

Directamente las coordenadas respecto de la base $\mathbf{B}$ son el vector $(6, 6)$ y por tanto **(d)** es la solución.

Evidentemente, tal como apuntó algún alumno, tendría más sentido preguntar por las coordenadas de la base $\mathbf{A}$. En ese caso tendríamos que proceder de la siguiente forma:

Denotemos por X^T, Y^T los vectores columnas de coordenadas con respecto de la base $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ respectivamente. la matriz de cambio de la base $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ es

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y por tanto $Y = BX \Leftrightarrow X = B^{-1}Y$. Luego

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

son las coordenadas del vector $\mathbf{w}$ respecto la base $\mathbf{A}$.

7. *Dada la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Señale la respuesta correcta.

- No es diagonalizable
- Su matriz diagonal asociada es la matriz unidad.
- El subespacio $\mathbb{E}_1$ asociado al autovalor $\lambda_1 = 1$ tiene dimensión 1

Solución (a)

Calculemos en primer lugar los autovalores

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right| = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^3 = 0$$

Luego $\lambda_1 = 1$ es el autovalor con multiplicidad 3. Las ecuaciones del subespacio $\mathbb{E}_1$ son

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = 0$$

Luego $\mathbb{E}_1$ es un espacio de dimensión 2 y por tanto la matriz no es diagonalizable.

8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tal su matriz asociada respecto de las bases* $\mathbf{A} = \{(1,1),(0,1)\}$, $\mathbf{B} = \{(2,1),(1,-1)\}$ *es*

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Entiéndase que estamos considerando que $\mathbf{A}$ *es la base en el espacio del dominio y* $\mathbf{B}$ *en el espacio imagen). Sea* v *un vector que tiene como como coordenadas* $\mathbf{v} = (1,2)$ *respecto de la base canónica* $\mathbf{A}' = \{(1,0),(0,1)\}$. *Señale cuáles son las coordenadas del vector imagen* $f(\mathbf{v})$ *respecto de la base* B.

Solución (b)

Sean X, X' los vectores coordenadas del vector $\mathbf{v}$ con respecto de las bases $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$ respectivamente, y del mismo modo sea Y los vectores coordenadas del vector imagen $f(\mathbf{v})$. Tenemos que

$$Y = PX,\ X' = AX \tag{1}$$

en donde $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz asociada a la aplicación f y $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz de cambio de base de $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}'$. De (1) se deduce fácilmente que $Y = PA^{-1}X'$ y por tanto el vector de coordenadas buscado viene dado por

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

9. Dada la forma cuadrática

$$w(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

señale una base del subespacio conjugado al vector $\mathbf{v} = (1,1,1)$.

Solución (d)

Determinemos en primer lugar la ecuación implícita del subespacio conjugado

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$
$$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0$$

Es un espacio de dimensión 2, luego descartamos las opciones (a), (b). Además como el vector $\mathbf{w} = (0,3,-2)$ no verifica la ecuación, compruébese que $3 \times 3 + 3 \times -2 = 3 \neq 0$, entonces dicho vector no pueder ser elemento de ninguna base del subespacio conjugado a $\mathbf{v}$.

10. Señale los valores del parámetro λ *para los que la forma cuadrática*

$$w(x_1, x_2, x_3) = \lambda x_1^2 - x_2^2 + 2\lambda x_2 x_3 + x_3^2$$

sea definida negativa.

Solución (c)

En primer lugar partimos de la expresión matricial de la forma cuadrática

$$w(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Por el criterio de Silvester para que la forma cuadrática sea definida negativa se debe cumplir

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 = \lambda < 0 \\ \Delta_2 = -\lambda > 0 \\ \Delta_3 = \lambda\,(-1 - \lambda^2) = (-\lambda)(1 + \lambda^2) < 0 \end{array}\right\}$$

Este sistema no tiene solución, de hecho de las dos primera necesariamente $\lambda < 0$ y por tanto $(-\lambda)(1+\lambda^2) > 0$ por ser $-\lambda$, $1 + \lambda^2$ dos números estrictamente positivos lo que contradice la tercera ecuación del sistema.

Solución de la segunda prueba de evaluación a distancia del 14 de enero de 2011

1. Cálcule el siguiente límite

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^3}{1-x^2}$$

Solución (b)

Se resuelve aplicando la regla de L'Hopital

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x^3}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{-3x^2}{-2x}=3/2$$

2. Señale el número de raíces reales de la ecuación $x^3-x^2+x-1=0$.

Solución (d)

Analicemos en primer lugar el signo de la derivada $f'(x)=3x^2-2x+1$. Como la ecuación

$$f'(x)=0$$

tiene raíces complejas, la función derivada f' tiene signo constante. De hecho es positivo ya que por ejemplo $f'(0)=1$. Luego la función f es estrictamente creciente en todo el dominio y por tanto solamente, en caso de existir, la raíz es única. Por otra parte aplicando el teorema de Bolzano podemos asegura la existencia de raíz. Por ejemplo en el intervalo $[0,2]$ existe dicha raíz ya que f es continua y $f(0)=-1$, $f(2)=5$. De hecho claramente dicha raíz se encuentra en $x=1$.

3. Dada la función $f(x)=\int_{-1}^{x}(s-1)ds$ *señale el punto* $c\in(0,1)$ *para el que se verifica el teorema del valor medio en el intervalo* $[0,1]$.

Solución (a)

Se trata de hallar el punto $c\in(0,1)$ tal que

$$f(1)-f(0)=f'(c) \tag{1}$$

Como

$$f(1) = \int_{-1}^{1} (s-1)ds = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{x=-1}^{x=1} = -2$$
$$f(0) = \int_{-1}^{0} (s-1)ds = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{x=-1}^{x=0} = -\frac{3}{2}$$

Por otra parte por el teorema fundamental del cálculo integral f es derivable y $f'(x) = x - 1$. Sustituyendo en (1) se tiene

$$-2 - (-\frac{3}{2}) = c - 1 \Rightarrow c = 1/2.$$

4. Hallar la distancia mínima del punto $(0, 2)$ *al conjunto* $\{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$.

Solución La distancia de un punto arbitrario (x, x^2) al punto $(0, 2)$ viene dada por la fórmula

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (x^2-2)^2} = \sqrt{x^2 + (x^2-2)^2}.$$

Por tanto tenemos que minimizar la función $\sqrt{x^2 + (x^2-2)^2}$ o equivalentemente la función

$$h(x) = x^2 + (x^2 - 2)^2$$

por ser la raíz cuadrada una función creciente en la recta positiva.

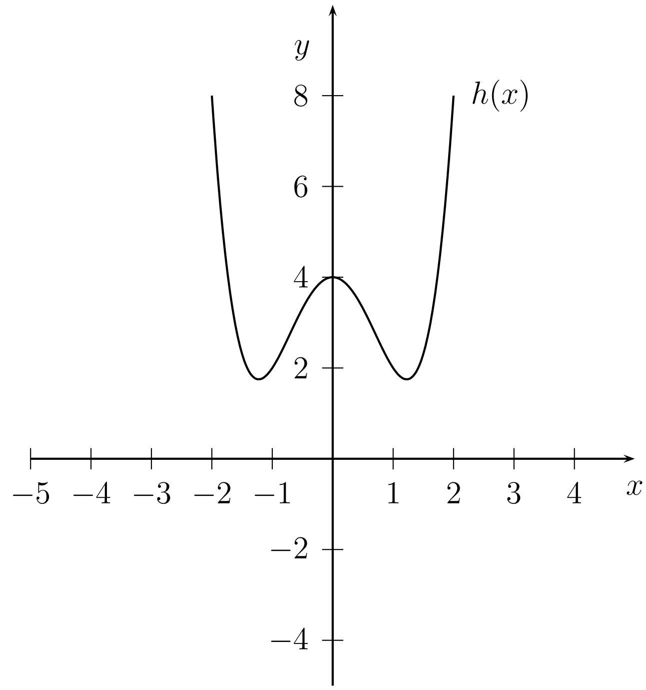
Derivando obtenemos los puntos críticos

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 4x(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\}.$$

El valor de la derivada segunda $h''(x) = 2+4(x^2-2)+8x^2 = 12x^2-6$ en ellos es

$$h''(0) = -6 < 0,\ h''(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}) = 12 > 0.$$

Luego la función h es simétrica respecto del eje OY alcanzando mínimos locales en los puntos $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. Del análisis del crecimiento y decrecimiento de la función se deduce fácilmente que dichos mínimos son



globales por lo que el valor mínimo de la función se alcanza en dichos puntos y por tanto la distancia mínima viene dada

$$\sqrt{h(\pm\sqrt{\frac{3}{2}})} = \sqrt{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

5. Señale el valor de la integral $I = \int_0^1 x^3 e^{-x^2} dx$.

Solución (b)

Es una integral que se resuelve por partes

$$\int_0^1 uv'dx = [uv]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 u'vdx$$

En este caso $u = x^2$, $u' = 2x$, $v' = xe^{-x^2}$, $v = -\frac{e^{-x^2}}{2}$. Luego

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^3 e^{-x^2} dx &= \left[-x^2 \frac{e^{-x^2}}{2} \right]_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 2x \frac{e^{-x^2}}{2} dx \\
&= -\frac{e^{-1}}{2} - 0 + \int_0^1 x e^{-x^2} dx \\
&= -\frac{e^{-1}}{2} + \left[\frac{e^{-x^2}}{2} \right]_{x=0}^{x=1} \\
&= -\frac{e^{-1}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} = \\
&= \frac{e-2}{2e}
\end{aligned}$$

6. Sea $f(x,y) = \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ *si* $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$. *Señale el valor de la derivada parcial* $D_1 f(0,0)$.

Solución (a)

Calculamos la derivada parcial directamente mediante la definición

$$\begin{aligned}
D_1 f(0,0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0) + t(1,0)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0)}{t} = \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \frac{t^3}{t^2} = 1
\end{aligned}$$

7. Sea el segmento $I = [(2,-1),(-1,2)]$ *de* $\mathbb{R}^2$ *y la función* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x,y) = x^2 y + x y^2$. *Determínese el punto de* I *para el que se cumple el teorema del valor medio de* f *en* I.

Solución (a)

Se trata de encontrar el punto $(\xi_1, \xi_2) \in I$ tal que

$$f(-1,2) - f(2,-1) = Df(\xi_1, \xi_2) \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \tag{2}$$

Como $f(-1,2) = f(2,-1) = -2$,

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy + y^2 & x^2 + 2xy \end{pmatrix}$$

e I es el segmento de recta que va de $(2,-1)$ a $(-1,2)$

$$I = \{(t, 1-t) : t \in (-1,2)\}$$

Sustituyendo en (2) se tiene

$$\begin{aligned} Df(t,1-t)\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} &= 0 \Leftrightarrow \\ -2t(1-t)-(1-t)^2+t^2+2t(1-t) &= 0 \\ 2t-1 &= 0 \\ t &= 1/2 \end{aligned}$$

Luego el punto buscado es $(1/2, 1/2)$.

8. Señálese el desarrollo de $f(x,y) = x^2y + 3y - 2$ en potencias de x e $(y-1)$.

Solución (a)

Es un polinomio de grado 3 luego es igual a su polinomio de Taylor de orden 3 en cualquier punto. En particular el centrado en $(0,1)$ nos dará el desarrollo de la función en potencias de x, $y-1$. Se trata entonces de hallar el polinomio de Taylor de orden 3 centrado en $(0,1)$. Como

$$\begin{aligned} f(0,1) &= \left[x^2y+3y-2\right]_{(x,y)=(0,1)} = 1 \\ D_1f(0,1) &= [2xy]_{(x,y)=(0,1)} = 0 \\ D_2f(0,1) &= \left[x^2+3\right]_{(x,y)=(0,1)} = 3 \\ D_{11}f(0,1) &= [2y]_{(x,y)=(0,1)} = 2 \\ D_{12}f(0,1) &= [2x]_{(x,y)=(0,1)} = 0 \\ D_{12}f(0,1) &= [0]_{(x,y)=(0,1)} = 0 \\ D_{111}f(0,1) &= 0 \\ D_{112}f(0,1) &= D_{121}f(0,1) = D_{211}f(0,1) = 2 \\ D_{221}f(0,1) &= D_{212}f(0,1) = D_{122}f(0,1) = 0 \\ D_{222}f(0,1) &= 0 \end{aligned}$$

Luego el polinomio de Taylor buscado es

$$\begin{aligned} & 1+3(y-1)+\frac{1}{2!}2x^2+\frac{1}{3!}(3\times 2\times x^2(y-1)) \\ = \;& 1+3(y-1)+x^2+x^2(y-1) \end{aligned}$$

9. Señale el valor de la integral $I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{4-x}} ydydx$

Solución (b)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{4-x}} ydydx &= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{4-x}} dx = \int_0^1 \frac{4-x}{2} dx \\ &= 2 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_{x=0}^{x=1} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

10. Halle el valor de la integral $\int_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$ *en donde* $D =$

$\{(x,y) : x^2+y^2 \leq 25, x \geq 0, y \geq 0\}$.

Solución (c)

Esta integral se calcula mediante un cambio a coordenadas esféricas

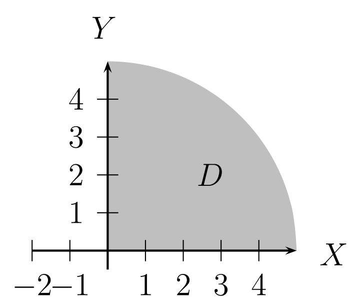
$$x = r\cos\theta,\ y = r\cos\theta$$

D es la parte círculo positivo de radio 5 y centro (0,0) que se encuentra en el cuadrante positivo ($x \geq 0$, $y \geq 0$). Luego el transformado es

$$T = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 5,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

y $\sqrt{x^2+y^2} = r$ Como el jacobiano es $J(r,\theta) = r$, por tanto por el teorema de cambio de variable

$$I = \int_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^5 rrdrd\theta = \frac{\pi}{2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=5} = \frac{125\pi}{6}$$



Solución de la prueba de evaluación a distancia del 15 diciembre 2011

1. *Sean los siguientos subconjuntos de* $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x_1, x_2) : x_1 x_2 = 1\} \\ A_2 &= \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = 0\} \\ A_3 &= \{(x_1, x_2) : e^{x_1} = 1\} \end{aligned}$$

Señale el número de ellos que son grupos si consideramos como operación la suma usual de vectores $+$.

a) 2

b) 1

c) 3

d) Ninguna de las anteriores

Solución (a)

A_1 no es grupo ya que la suma usual de vectores no es ni siquiera una operación interna para dicho conjunto, es decir la suma de vectores de A_1 no pertenece en general a A_1. Por ejemplo $b_1 = (1, 1)$, $b_2 = \left(2, \dfrac{1}{2}\right)$ pertenecen a A_1 pero $b_1 + b_2 = (3, \frac{3}{2})$ no pertenece a A_1 ya que $3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \neq 1$.

Como $e^{x_1} = 1$ solamente si $x_1 = 0$, entonces

$$A_3 = \{(0, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\}$$

$(A_3, +)$ es grupo con elemento neutro $e = (0, 0)$, el inverso de un elemento dado $(0, x_2)$ es $(0, -x_2)$ que pertenece a A_3. Además la operación es asociativa por serlo la suma de números reales. De hecho dados tres elementos $a = (0, a_1)$, $b = (0, b_2)$, $c = (0, c_2)$ de A_3 se tiene que

$$\begin{aligned} a + [b + c] &= (0, a_1) + (0, b_1 + c_1) = (0, a_1 + [b_1 + c_1]) \\ &= (0, [a_1 + b_1] + c_1) = (0, a_1 + b_1) + (0, c_1) \\ &= [a + b] + c \end{aligned}$$

luego la operación es asociativa.

De igual manera $A_2 = \{(x_1, -x_1) : x_1 \in \mathbb{R}\}$ es asimismo grupo, el elemento neutro es $(0, 0)$ y el inverso de un elemento $(x_1, -x_1)$ es $(-x_1, x_1)$ que vuelve a pertenecer a A_2. De igual manera a lo anterior se prueba que la suma de vectores es asociativa por verificarse dicha propiedad para los números reales.

2.*Determínese el conjunto de puntos de acumulación de la sucesión* $(a_n) \subset \mathbb{R}^2$ *definida como*

$$a_n = \left((-1)^{3n+1}, \frac{7n^3+3}{(n+1)(n^2-1)}(-1)^{3n+3} \right).$$

a) $\{(-1,-7)\}$
b) $\{(1,7),(1,-7)\}$
c) $\{(1,7),(-1,-7)\}$
d) Ninguna de las anteriores

Solución (c)

Tal como hemos visto en las pruebas de autoevaluación, la acumulación está formada por los límites de las subsucesiones formadas por elementos del conjunto sin que dicho límite sea elemento de dicha sucesión. Como los elementos de las sucesiones

$$3n+1 = \{4,7,10,13,16,...\}$$
$$3n+3 = \{6,9,12,15,18,...\}$$

son números impares en los términos pares y números pares en los impares. Esto nos hace considerar las subsucesiones en los terminos pares e impares:

$$(a_{n^*}) = \left(-1, -\frac{7n^{*3}+3}{(n^*+1)(n^{*2}-1)}\right) \to (-1,-7),\ (n^* par)$$
$$(a_{n'}) = \left(1, \frac{7n'^3+3}{(n'+1)(n'-1)}\right) \to (1,7),\ \ (n' \text{ impar})$$

Como $(-1,-7)$, $(1,7)$ no son elementos del conjuntos podemos concluir que los puntos acumulación son $\{(-1,-7),(1,7)\}$.

3. De las siguientes afirmaciones señale el número de ellas que son verdaderas:

- *Existe una matriz cuadrada A que no tiene matriz inversa para la cual siempre podemos encontra una matriz B verificando $AB = I$.*
- *Si A y B son matrices cuadradas de orden n e invertibles, entonces $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.*

- *Si* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *y* $ab - cd \neq 0$, *entonces* A *es invertible.*
- *Si* A *es una matriz cuadrada de orden* n, *entonces el sistema lineal* $Ax = b$ *tiene solución única para cualquier vector (matriz columna)* b.

a) 1
b) 2
c) 4
d) Ninguna de las anteriores
Solución (d)

(1) Falso. En caso de que nos encontremos en dicha situación, por propiedades determinantes se tiene que

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(I) = 1$$

y por tanto necesariamente se cumple $\det(A) \neq 0$. Con lo que A posee inversa por el teorema de caracterización de la matriz inversa.

(2) Falso. Como $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, si fuese cierto tendríamos que $B^{-1}A^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ lo que nos llevaría a concluir que todas las matrices regulares verican la propiedad conmutativa. Pero esto sabemos no es cierto general. Basta tomar como ejemplo dos matrices regulares que no conmutan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\begin{aligned} (AB)^{-1} &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = A^{-1}B^{-1} \end{aligned}$$

(3) Falso. Por ejemplo consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

se cumple

$$ab - cd = 2 \times 2 - 1 \times 1 = 3$$

y la matriz no tiene inversa por ser su determinante nulo.

(4) Falso. Claramente si la matriz A del sistema no es regular entonces no podemos asegurar la unicidad del solución del mismo. Por ejemplo tomando

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A no es regular y el sistema asociado tiene infinitas soluciones

$$\{(1, y) : y \in \mathbb{R}\}$$

4. *Consideremos las matrices*

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Siendo $M = I - X^T X$ (en donde I es una matriz unidad de orden adecuado) señale el valor $V^T MV$

a)$V^T MV = 9$
b) $V^T MV = 22$
c) $V^T MV = -6$
d) Ninguna de las anteriores

Solución (c)

Basta operar directamente,

$$X^T X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

De esta forma

$$M = I - X^T X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Y por tanto

$$V^T M V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -6$$

5. *Señale las ecuaciones implícitas del espacio generado por el sistema*

$$\mathbf{S} = \{(1,1,1,1),(0,1,0,0),(1,2,3,4)\}$$

(a)$\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - 2x_3 + x_4 = 0\}$
(b) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$
(c) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_3 + 5x_4 = 0\}$
(d) Ninguna de las anteriores
Solución (d)

El sistema es linealmente independiente ya que el rango de la matriz asociada

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

es máximo, 3, por encontrarse una submatriz de orden 3 con determinante no nulo. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

Como el subespacio generado tiene dimensión 3 y estamos en $\mathbb{R}^4$ existirá una sola ecuación paramétrica. La ecuaciones parámetricas vienen dadas por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Para encontrar las ecuaciones del sistema seguimos el procedimiento sistemático de hacer una fila nula mediante operaciones elementales (véase procedimiento pruebas de autoevaluación). Restando la primera fila a las restantes hacemos ceros por debajo del primer elemento de la diagonal

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_1 \\ x_4 - x_1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando la tercera fila por el factor $1/2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ \frac{1}{2}(x_3 - x_1) \\ x_4 - x_1 \end{pmatrix}$$

Sumando a la cuarta fila la tercera multiplicada por el factor -3 llegamos a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_1 \\ x_4 - x_1 - \frac{3}{2}(x_3 - x_1) \end{pmatrix}$$

Luego la ecuación paramétrica es la asociada a la cuarta fila del sistema

$$x_4 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 - 3x_3 + 2x_4 = 0$$

Que comprobamos no coincide con ninguna de las dadas.

De una manera más sencilla podríamos haber comprobado que las ecuaciones propuestas no pueden ser las parámetricas del sistema. El vector $(1, 2, 3, 4)$ del sistema no verifica ninguna de las ecuaciones propuestas

$$\begin{aligned} 1 - 6 + 4 &= -1 \\ 1 - 2 + 3 &= 2 \\ 1 - 3 + 20 &= 18 \end{aligned}$$

Téngase en cuenta que dada una base del sistema basta que se cumpla la ecuación propuesta en los elementos de la bases para asegurar que es la ecuación paramétrica del sistema buscado.

6. *Sea $V = M_2$ el espacio vectorial de matrices cuadradas de orden 2 y considere las bases*

$$\mathbf{A} = \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
$$\mathbf{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Señale la matriz de cambio de base de B a A.

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solución (b)

La matriz de cambio de base de **B** a **A** es la matriz que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base **B** con respecto de **A**. En este caso como

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$
$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$$
$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{u}_4$$
$$\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{u}_1$$

La matriz de cambio de base es por tanto

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vea que el determinante de esta matriz es distinto de 0 condición indispensable para ser una matriz de cambio de base, eso probaria en caso de tener duda que el sistema **B** es una base, dando por supuesto que sabemos por el libro de texto que el sistema **A** es una base (p. 58 libro de texto).

7. *Determine la matriz* $A \in M_3$ *diagonalizable cuya matriz diagonal equivalente es*

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

siendo $\{(1,0)\}$ *la base del subespacio asociado al autovalor* $\lambda = 1$, *y* $\{(1,1)\}$ *la base del subespacio asociado al autovalor* $\lambda = 0$.

(a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Solución (b)

Teniendo en cuenta el proceso de diagonalización de matrices (p. 101-2 libro de texto) se tiene que la matriz buscada A viene dada por

$$A = PDP^{-1}$$

en donde P (igual a la inversa de la matriz Q del libro de texto) es la matriz que tiene como columnas a los vectores de la base asociada a los subespacios ordenados en el mismo orden que los autovalores en la diagonal. En este caso la primera columna estará formada por el vector asociado al autovalor $\lambda = 1$ y el segundo vector será el asociado al autovector asociado al autovalor $\lambda = 0$. Luego

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con lo que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8. *Sea* $P_2 = \{p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 : a_i \in R\ \}$ *el espacio vectorial de polinomios de grado igual o menor a 2. Considere la bases* $A = \{p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = x^2\}$, $B = \{p_0^*(x) = 1 + x, p_1^*(x) = x, p_2^*(x) = x^2 - x\}$. *Sea* $F : P_2 \to P_2$ *la aplicación lineal que a cada* $p = a_2x^2 + a_1x + a_0 \in P_2$ *le asocia el polinomio* $F(p) = a_0x^2 + a_1x + a_2$. *Señale la matriz asociada a la aplicación si en el espacio del dominio consideramos la base* A *y en el espacio imagen la base* B.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solución (b)

La matriz de la aplicación lineal es aquella que tiene por columnas las coordenadas de las imágenes de la base del dominio **A** respecto de la base **B**. Como

$$\begin{aligned} f(p_0) &= f(1) = x^2 = x^2 - x + x = p_2^*(x) + p_1^*(x) \\ f(p_1) &= f(x) = x = p_1^*(x) \\ f(p_2) &= f(x^2) = 1 = 1 + x - x = p_0^*(x) - p_1^*(x) \end{aligned}$$

Por tanto la matriz viene dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9. *Señale la inercia de la forma cuadrática asociada a la matriz*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

(a)$(1, 1, 1)$
(b)$(2, 0, 1)$
(c)$(0, 1, 2)$
Solución (d)
Por el criterio de Silvester

$$\Delta_1 = -1 < 0$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0$$
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

la matriz de la forma cuadrática es definida negativa. Luego su inercia es $(0, 3, 0)$.

10. Sea $\mathbb{P}_2 = \{p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 : a_i \in \mathbb{R}\ \}$ el espacio vectorial de polinomios de grado igual o menor a 2, y sean los elementos $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$, . Considerando en $\mathbb{P}_2$ la aplicación bilineal simétrica φ definida por

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

señale el subespacio $\mathbb{V}$ conjugado a $\{p_1, p_2\}$ con respecto a φ.
(a) $\mathbb{V} = \left\{p(x) = \lambda\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) : \lambda \in \mathbb{R}\right\}$
(b) $\mathbb{V} = \left\{p(x) = \lambda\left(x^2 + x - \frac{1}{3}\right) : \lambda \in \mathbb{R}\right\}$
(c) $\mathbb{V} = \left\{p(x) = \lambda\left(x^2 - x - \frac{1}{2}\right) : \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

Solución (a)

Para que el sistema $\left\{p(x) = \lambda\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) : \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ sea conjugado a $\{p_1, p_2\}$ necesariamente se debe verificar

$$\varphi(x^2 - x + \frac{1}{6}, p_1) = 0, \varphi(x^2 - x + \frac{1}{6}, p_2) = 0$$

Como

$$\varphi(x^2 - x + \frac{1}{6}, 1) = \int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{6})dx = 0$$
$$\varphi(x^2 - x + \frac{1}{6}, x) = \int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{6})xdx = 0$$

Por otro lado $\left\{p(x) = \lambda\left(x^2 + x - \frac{1}{3}\right) : \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ no puede ser conjugado a $\{p_1, p_2\}$ ya que

$$\varphi(x^2 + x - \frac{1}{3}, 1) = \int_0^1 (x^2 + x - \frac{1}{3})dx = \frac{1}{2} \neq 0$$

ni $\left\{p(x) = \lambda\left(x^2 - x - \frac{1}{2}\right) : \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ tampoco ya que

$$\varphi(x^2 - x - \frac{1}{2}, 1) = \int_0^1 (x^2 - x - \frac{1}{2})dx = -\frac{2}{3} \neq 0$$

1^a **Prueba de Evaluación a Distancia** Curso 2012-2013

- Cada pregunta tiene una sola respuesta correcta. Cada pregunta acertada suma 1 punto, las incorrectas restan 0.3. Las preguntas en blanco no puntúan.
- Las preguntas deben ser contestadas en el cuestionario virtual al que se accede a través del link "*Cuestionario: Primera prueba de evaluación a distancia online.*".
- Recuerde que dentro del examen virtual las respuestas deben ser marcadas en la pestaña correspondiente.
- El cuestionario virtual estara disponible los días 13, 14, 15, 16 y 17 de diciembre.

Ejercicio 1 Si $\lambda \bullet (x_1, x_2) = (\lambda x_1, 0)$ (operación de escalares con pares de $\mathbb{R}^2$), entonces **NO** se verifica la siguiente propiedad:

A) Distributiva de los escalares respecto a los vectores

B) Distributiva de los vectores respecto a los escalares

C) Asociativa $(\lambda\mu) \bullet \overline{x} = \lambda \bullet (\mu \bullet \overline{x})$

D) Existencia de escalar unidad

Ejercicio 2 El conjunto $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x - y| < 3\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| \leq 0\}$ verifica:

A) E es un intervalo abierto

B) $\mathrm{Adh}E = E$

C) $E' = \emptyset$

D) Ninguna de las anteriores.

Ejercicio 3 En general, **NO** es cierto:

A) Un conjunto puede tener un punto de acumulación que no es de adherencia

B) Todos los conjuntos acotados son abiertos o cerrados

C) El conjunto de matrices de orden 2 diagonales con la operación suma habitual forman un grupo conmutativo

D) Ninguna de las anteriores.

Ejercicio 4 Sea S el conjunto de soluciones reales de la ecuación $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Entonces

A) $(S, +)$ es un grupo con $+$ la suma usual de vectores en $\mathbb{R}^3$

B) S es una recta de $\mathbb{R}^3$

C) Si $(x_1, x_2, x_3) \in S$ entonces $\lambda(x_1, x_2, x_3) \notin S$ siendo $\lambda \in \mathbb{R}$ cualquiera

D) Ninguna de las anteriores

Ejercicio 5 El sistema $mx + y + z = 0$; $x + my + z = 0$; $x + y + mz = 0$ con $m \in \mathbb{R}$ verifica:

A) Si $m = 1$ o $m = -2$ el sistema es compatible determinado

B) Si $m \neq -2$ el sistema es compatible indeterminado

C) Si $m \neq 1$ el sistema es compatible determinado

D) Ninguna de las anteriores

Ejercicio 6 Las dimensiones del subespacio núcleo e imagen de la aplicación lineal $f \colon \mathcal{M}_{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a + d, 0)$ son:

A) $\operatorname{Dim} \operatorname{Im} f = 2$ y $\operatorname{Dim} \operatorname{Ker} f = 2$

B) $\operatorname{Dim} \operatorname{Im} f = 1$ y $\operatorname{Dim} \operatorname{Ker} f = 1$

C) $\operatorname{Dim} \operatorname{Im} f = 1$ y $\operatorname{Dim} \operatorname{Ker} f = 2$

D) Ninguna de las anteriores.

Ejercicio 7 Si A es una matriz regular y B es una matriz cuadrada arbitraria del mismo orden que A, entonces las matrices AB y BA tienen los valores propios:

A) Iguales

B) Opuestos

C) Recíprocos

D) Ninguna de las respuestas anteriores

Ejercicio 8 Se considera la aplicación f, de $\mathcal{M}_{n\times n} \times \mathcal{M}_{n\times n}$ en el cuerpo de los números reales, $\mathbb{R}$ tal que a todo par de matrices cuadradas reales de orden n, (A, B), se le hace corresponder la traza T_r (suma de los elementos de la diagonal principal) de la matriz producto de A por la traspuesta de B, es decir:

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n\times n} \times \mathcal{M}_{n\times n}, \quad f(A, B) = T_r(A.B^t)$$

La aplicación f es: A) Solamente lineal; B) Bilineal simétrica; C) Bilineal pero no simétrica; D) Ninguna de las anteriores

Ejercicio 9 La forma cuadrática definida por la expresión $w(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 8x_3^2 + 10x_1x_2$ es:

A) Semidefinida positiva

B) Definida positiva

C) Definida negativa

D) Ninguna de las anteriores

Ejercicio 10 Si w es una foma cuadrática de $\mathbb{R}^4$ es cierto:

A) $w(-\mathbf{x}) = -w(\mathbf{x})$

B) w puede tener asocida varias formas bilineales simétricas distintas.

C) Las matrices asociadas a w en distintas bases son equivalentes.

D) Ninguna de las anteriores

SOLUCIONES

Solución 1 Es **D)**

A) es verdadera. Las operaciones definidas entre escalares y vectores pueden no coincidir con las operaciones estándar suma y producto. Se verifica $\lambda \bullet (\mathbf{x}+\mathbf{y}) = (\lambda \bullet \mathbf{x}) + (\lambda \bullet \mathbf{y})$:

- Primer miembro:
$$\lambda \bullet (\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \lambda \bullet (x_1+y_1, x_2+y_2) = (\lambda(x_1+y_1), 0) = (\lambda x_1 + \lambda y_1, 0).$$
- Segundo miembro:
$$\lambda \bullet (x_1, x_2) + \lambda \bullet (y_1, y_2) = (\lambda x_1, 0) + (\lambda y_1, 0) = (\lambda x_1 + \lambda y_1, 0).$$

B) es verdadera. Se verifica $(\lambda + \mu) \bullet \mathbf{x} = (\lambda \bullet \mathbf{x}) + (\mu \bullet \mathbf{x})$:

- Primer miembro:
$$(\lambda + \mu) \bullet (x_1, x_2) = ((\lambda+\mu)x_1, 0) = (\lambda x_1, 0) + (\mu x_1, 0).$$
- Segundo miembro:
$$\lambda \bullet (x_1, x_2) + \mu \bullet (x_1, x_2) = (\lambda x_1, 0) + (\mu x_1, 0) = (\lambda x_1 + \mu x_1, 0).$$

C) es verdadera. Se verifica $(\lambda\mu) \bullet \overline{x} = \lambda \bullet (\mu \bullet \mathbf{x})$.

- Primer miembro: $(\lambda\mu) \bullet (x_1, x_2) = ((\lambda\mu)x_1, 0) = (\lambda\mu x_1, 0)$.
- Segundo miembro: $\lambda \bullet (\mu \bullet (x_1, x_2)) = \lambda \bullet (\mu x_1, 0) = (\lambda\mu x_1, 0)$.

D) es falsa porque $1 \bullet (x_1, x_2) = (1x_1, 0) \neq (x_1, x_2)$.

Solución 2 Es **D)**.

Aunque el conjunto E es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ su representación gráfica (la cual es sencilla, por ser intersección de regiones inmediatas) nos ayudará a decidir si son o no ciertas cada una de las opciones presentadas. Las propiedades topológocas en $\mathbb{R}^n$ están definidas en el capítulo 8 y generalizan las definidas en $\mathbb{R}$ en el cápítulo 1. Se verifica:
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x-y| < 3\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x-y < 3\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon -3 < x-y\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon -3 < x-y < 3\}$ y $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| \leq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = 0\}$. Por tanto $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon -3 < x-y < 3\} \cup \{(0,y) \in \mathbb{R}^2\}$. Si se representa gráficamente, se observa que E no es un intervalo ya que, en particular, no es un subconjunto de $\mathbb{R}$ (A) es

falsa). Además $\text{Adh}E \neq E$ porque $(3,0) \in \text{Adh}E$ pero $(0,3) \notin E$ (B) es falsa). Por otro lado, $E' \neq \emptyset$ porque $(0,0) \in E'$ (C) es falsa).

Solución 3 **Es B)**. La afirmación de A) es cierta por teoría (todo punto de acumulación es de adherencia). La afirmación de la opción C) es cierta, ya que se verifica las cuatro propiedades de grupo conmutativo. Mientras que la afirmación en B) es falsa ya que no existe relación entre los conjuntos abiertos o cerrados y los conjuntos acotados.

Solución 4 **Es A).**
El conjunto S está formado por las ternas de números reales (s_1, s_2, s_3), que satisfacen la condición $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$, es decir, el subconjunto de $\mathbb{R}^3$:

$$S = \left\{(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3 : \, 2s_1 - s_2 + s_3 = 0\right\}.$$

Nótese que E es no vacío, al menos $(0,0,0) \in E$.
Se verifica que la suma de dos soluciones de la ecuación es solución de la ecuación (es la condición $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in S \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in S$ expresada para este caso concreto, donde V es $\mathbb{R}^3$: $(s_1, s_2, s_3) \in E \Leftrightarrow 2s_1 - s_2 + s_3 = 0$ y $(t_1, t_2, t_3) \in E \Leftrightarrow 2t_1 - t_2 + t_3 = 0$.

Se trata de ver que $(s_1, s_2, s_3) + (t_1, t_2, t_3)$ está en S. En efecto:
Como $(s_1, s_2, s_3) + (t_1, t_2, t_3) = (s_1 + t_1, s_2 + t_2, s_3 + t_3)$, sólo falta comprobar que sus coordenadas cumplen la ecuación teniendo en cuenta que cada vector la cumple por ser elemento de S:
$2(s_1 + t_1) - (s_2 + t_2) + (s_3 + t_3) = (2s_1 - s_2 + s_3) + (2t_1 - t_2 + t_3) = 0$.
Por lo tanto, $(s_1, s_2, s_3) + (t_1, t_2, t_3) \in S$.
Verifica que el producto de un número real por una terna, solución de la ecuación, también es solución de la ecuación (es la condición $\forall \mathbf{u} \in S, \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \mathbf{u} \in S$: $\lambda(s_1, s_2, s_3) \in S$ porque $(\lambda s_1, \lambda s_2, \lambda s_3)$ verifica $2\lambda s_1 - \lambda s_2 + \lambda s_3 = \lambda(2s_1 - s_2 + s_3) = 0$.
Geométricamente, S representa un plano de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$ (nótese que pasa por el origen). La ecuación $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$ es la ecuación cartesiana del subespacio S de $\mathbb{R}^3$. S tiene dimensión 2 y es un plano de $\mathbb{R}^3$. Solo es cierta A).

Solución 5 **Es D)**.
El sistema es homogéneo, y por tanto siempre es compatible.

El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ vale $(m+2)(m-1)^2$.

Si $m = 1$ o $m = -2$ el sistema es compatible indeterminado (A) es falsa). Si $m \neq -2$ el sistema es compatible indeterminado si $m = 1$ y determinado si $m \neq 1$. Recíprocamente si $m \neq 1$ el sistema es compatible indeterminado si $m = -2$ y determinado si $m \neq -2$. Solo es cierta D).

Solución 6 **Es D)**.

Las condiciones que cumplen los vectores $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que pertenecen al núcleo son $a = -d$ (que se deducen de $f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = (a+d, 0) = (0,0)$). Luego, b y c pueden tener cualquier valor lo que implica que $\mathrm{Ker}(f) = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2} \colon f(A) = (0,0)\} = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2} \colon a = -d\} = G(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$. Es decir, $\mathrm{Dim}\,\mathrm{Ker}(f) = 3$. El subespacio imagen de f es un subespacio de $\mathbb{R}^2$ definido por el conjunto

$$\mathrm{Im}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tales que existe } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2} \text{ tal que } f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (x,y)\} = \{(a+d, 0) \colon a,\, d \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0) \rangle.$$

Solo es cierta D).

Nótese que a, $b \in \mathbb{R}$ son cualquiera porque f se define sobre todos los vectores $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{2\times 2}$. Recuérdese que $\mathrm{Dim}\,\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Dim}\,\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Dim}\,\mathcal{M}_{2\times 2} = 4$.

Solución 7 **Es A).**

Sea λ un valor propio de AB, como A es una matriz regular se cumple:

$AB - \lambda I = AB - \lambda A A^{-1} = A(B - \lambda A^{-1})$.

Considerando determinantes en la expresión anterior:

$|AB - \lambda I| = |A(B - \lambda A^{-1})| = |A||B - \lambda A^{-1}| = |B - \lambda A^{-1}||A| = |(B - \lambda A^{-1})A| = |BA - \lambda I|$.

Por consiguiente las matrices AB y BA tienen los autovalores iguales. Por tanto la opción correcta es la A).

Solución 8 **Es B).**

Una matriz cuadrada y su traspuesta tienen la misma diagonal principal por lo que tienen la misma traza. Entonces:

$$T_r(A.B^t) = T_r((A.B^t)^t) = T_r(B.A^t)$$

y por tanto $f(A,B) = f(B,A)$. Por otro lado:

$$f(aA+bB,C) = T_r((aA+bB).C^t) = T_r(aA.C^t + bB.C^t) = T_r(aA.C^t) + T_r(bB.C^t) = aT_r(A.C^t) + bT_r(B.C^t) = af(A,C) + bf(B,C)$$

análogamente se sigue que:

$$f(C, aA+bB) = af(C,A) + bf(C,B).$$

Por tanto f es bilineal, B) es cierta y A) es falsa. Además $f(A,B) = T_r(A.B^t) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}b_{ij}$ y, en particular, $f(A,A) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2$ es positiva (y nula si y sólo si A es la matriz nula).

f no es lineal porque $f((A,B)+(C,D)) = f((A+C,B+D)) \neq f(A,B) + f(C,D)$ luego A) es falsa.

Solución 9 **Es D).**

Una matriz asociada a la forma cuadrática (en la base canónica) es $Q = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$. En efecto $w(x_1,x_2,x_3) = X^tQX$ siendo $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. El rango de Q es 3. Utilizando el criterio de las submatrices principales se deduce que B) y C) son falsas (también se deduce lo anterior teniendo en cuenta el rango de Q). Como además $w(1,-1,0) = -6$ la forma cuadrática no puede ser semidefinida positiva. Correcta la opción D).

Nótese que la forma cuadrática tiene como signatura 2 y como inercia $(2, 3-2, 3-3)$. Entonces w es indefinida.

Solución 10 **Es cierto C).**

A) es falsa porque $w(-\mathbf{x}) = w(-(x_1,x_2,x_3,x_4)) = f(-(x_1,x_2,x_3,x_4), -(x_1,x_2,x_3,x_4)) = (-1)^2 f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ siendo f cualquier forma bilineal asociada a w. B) es falsa porque la forma polar de w es única. C) es cierta porque las matrices asociadas a w en distinas bases son congruentes, lo cual implica que son también equivalentes.

Solución de la prueba de evaluación a distancia del 13 enero 2012

1. *Señale el valor de la integral* $I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{4-x}} ydydx$

a) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{7}{4}$
c) $\frac{3}{4}$
d) Ninguna de las anteriores

Solución (b)

Integrando directamente se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{4-x}} ydydx &= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{4-x}} dx = \int_0^1 \frac{4-x}{2} dx = \int_0^1 \left(2 - \frac{x}{2}\right) dx \\ &= 2 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_{x=0}^{x=1} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

2. *Sean* $f(u,v) = (e^u, e^v + e^u)$, $g(x,y) = (x^2, x^2 + y)$. *Determine la diferencial de* $F = g \circ f$ *en el punto* $(0,0)$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
d) Ninguna de las anteriores

Solución (b)

Aplicamos la regla de la cadena (véase pp. 246-7). Tenemos que $f(0,0) = (1,2)$ y las matrices jacobianas vienen dadas por

$$f'(0,0) = \begin{pmatrix} e^u & 0 \\ e^u & e^v \end{pmatrix}_{(u,v)=(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g'(f(0,0)) = g'(1,2) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 2x & 1 \end{pmatrix}_{(x,y)=(1,2)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego

$$(g \circ f)'(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

3. *Señale el valor de la integral* $I = \int_1^2 \frac{e^{2x}+e^x}{e^x-1}dx$

a) $I = \ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right)$

b) $I = e^2 - e + 2\ln\left(\frac{e^2-1}{e-1}\right)$

c) $I = e - 1 + 2\ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right)$

Solución (b)

Consideramos el cambio de variable $x(t) = \ln t$, tenemos que $x(e) = 1$, $x(e^2) = 2$ y además $x'(t) = \frac{1}{t}$. Por tanto aplicando el teorema de cambio de variable (p. 211 libro de texto) se tiene

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{e^{2x}+e^x}{e^x-1}dx &= \int_e^{e^2} \frac{t^2+t}{t-1}\frac{1}{t}dt = \int_e^{e^2} \frac{t+1}{t-1}dt = \int_e^{e^2} \frac{t-1+2}{t-1}dt = \\ &= \int_e^{e^2} \frac{t-1}{t-1}dt + \int_e^{e^2} \frac{2}{t-1}dt = e^2 - e + [2\ln(t-1)]_{x=}^{t=e^2} = \\ &= e^2 - e + 2\ln\left(\frac{e^2-1}{e-1}\right)\end{aligned}$$

4. *Señale el valor de la integral* $I = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^4 x dx$ *(Ayuda: Utilice fórmulas trigonométricas para reducir el exponente)*

a)$I = \frac{3\pi}{4}$

b)$I = \frac{\pi}{2}$

c) $I = \frac{\pi}{4}$

Solución (a)

Para calcular esta integral utilizaremos las siguientes identidades trigonométricas conocidas

$$\cos^2 x = \tfrac{1+\cos 2x}{2}$$
$$\operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1-\operatorname{sen} 2x}{2}$$

Aplicando estas dos fórmulas consecutivamente reducimos el orden del exponente

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^4 x &= \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{\cos^2 2x}{4} + \cos 2x = \frac{1}{4} + \frac{\frac{1-\operatorname{sen} 2x}{2}}{4} + \cos 2x \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1-\operatorname{sen} 2x}{8} + \cos 2x
\end{aligned}$$

lo que simplifica la integral ya que

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^4 x dx &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} dx + \int_0^{2\pi} \frac{1-\operatorname{sen} 2x}{8} dx + \int_0^{2\pi} \cos 2x dx = \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - 0 + 0 = \frac{3\pi}{4}
\end{aligned}$$

5. *Determínese un punto donde la función* $f(x,y) = (x-2)^2/4 + (y-3)^2/9$ *alcanza su valor mínimo en el segmento* $\{(x,y) : y + x = 3,\ x \geq 0, y \geq 0\}$.

a) $(x,y) = (18/13, 21/13)$
b) $(x,y) = (0,0)$
c) $(x,y) = (5/2, 1/2)$

Solución (a)

Como $x = 3 - y$ minimizar la función de dos variables f en el dominio dado es equivalente a minimizar la función de una variable

$$h(x) = f(x, 3-x) = \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{x^2}{9} = \frac{13}{36}x^2 - x + 1$$

en el intervalo $I = [0, \infty)$. La función derivada de h viene dada por

$$h'(x) = \frac{26}{36}x - 1$$

La función tiene un único punto crítico en

$$\overline{x} = \frac{36}{26} = \frac{18}{13}$$

que es un mínimo local. El mínimo es asimismo global ya que la función derivada es negativa a la derecha, luego decreciente, y positiva a la izquierda y por tanto creciente. El punto correspondiente

$$(x, y-3) = \left(\frac{18}{13}, 3 - \frac{18}{13}\right) = \left(\frac{18}{13}, \frac{21}{13}\right)$$

es un mínimo global de la función f.

7. *Señale el valor de la integral* $I = \int_S xydxdy$. *en donde*

$$S = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} \leq 1 \right\}$$

(Ayuda: Utilice el cambio $x = \sqrt{2}r\cos\theta$, $y = \sqrt{3}r\operatorname{sen}\theta$*)*

a)$I = \sqrt{2}/2$

b)$I = \sqrt{6}/8$

c) $I = 0$

Solución (c)

Aplicamos teorema de cambio de variable (véase p. 286 libro de texto). El cambio $g(r,\theta) = (\sqrt{2}r\cos\theta, \sqrt{3}r\operatorname{sen}\theta)$ tiene como jacobiano

$$g'(r,\theta) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\theta & \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta \\ -\sqrt{2}r\operatorname{sen}\theta & \sqrt{3}r\cos\theta \end{pmatrix}$$

con determinante

$$|g'(r,\theta)| = \sqrt{6}r(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = \sqrt{6}r$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} &\leq 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}^2 r^2\cos^2\theta}{2} + \frac{\sqrt{3}^2 r^2\operatorname{sen}^2\theta}{3} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow r^2 \leq 1 \Rightarrow r \leq 1 \end{aligned}$$

Luego

$$T = g^{-1}(S) = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 1,\ \theta \in [0, 2\pi)\}$$

Aplicando el teorema de cambio de variable

$$\begin{aligned} \int\int_S xydxdy &= \int\int_T (\sqrt{2}r\cos\theta)\left(\sqrt{3}r\operatorname{sen}\theta\right)\sqrt{6}rdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 6r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 3r^2\operatorname{sen}2\theta drd\theta \\ &= 3\left[-\frac{\cos 2\theta}{2}\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=1} = 0 \end{aligned}$$

7. *Dada la función*

$$f(x,y,z) = (x-y+z)^2 + (x+2z)^3 + (z+1)^5 + 2x^6 - y^7,$$

señálese el valor en el punto $(1,0,-1)$ *del polinomio de Taylor de orden tres en el punto* $(0,0,0)$

a)10

b) -5

c) -10

Solución (b)

Se puede hacer directamente calculando el polinomio de Taylor. Si uno hace esto puede darse cuenta que un polinomio de Taylor de un polinomio de orden n en el punto $(0,0,0)$ coincide con los términos de grado igual a menor a 3 de dicho polinomio (compruébese que esto solamente en cierto en general cuando el punto es (0,0,0)). Por tanto en este caso

$$P_3(x,y,z) = (x-y+z)^2 + (x+2z)^3 + 10z^3 + 10z^2 + 5z + 1$$

Con lo que

$$P_3(1,0,-1) = (1-0-1)^2 + (1-2)^3 - 10 + 10 - 5 + 1 = -5$$

8. *Señale el valor del límite* $L = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$.

1/2

1

0

Solución (c)

La función es continua en el punto 0, luego evaluando directamente se tiene

$$L = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{0}{\sqrt{0^2+1}} = \frac{0}{1} = 0$$

9. *Sea* $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$, $x > -1$. *Señale la respuesta correcta:*

a) $f'(1) = \dfrac{1}{\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)\left(2\sqrt{2}+2\right)}$

b) $f'(1) = \dfrac{1}{\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}$

c) $f'(1) = \dfrac{1}{4\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}$

Solución (d)

Para calcular la derivada aplicamos la regla de la cadena

$$\begin{aligned}\left(1+(1+x)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}\prime}_{x=1} &= \frac{1}{2}\left(1+(1+x)^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1+(1+x)^{\frac{1}{2}}\right)' \\ &= \frac{1}{2}\left(1+(1+x)^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Luego

$$f'(1) = \frac{1}{2}\left(1+(1+1)^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}(1+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}}$$

10. *Señale el valor del límite* $L = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

a) $L = 2$

b) No existe

$c) = 0$

Solución (a)

Utilizamos el resultado de cálculo de límite mediante coordenadas polares (véase p. 382-3). Haciendo el cambio a polares de la función ($x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$)

$$\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \frac{r^2}{\sqrt{r^2+1}-1}$$

vemos que no depende del ángulo. Por tanto podemos aplicar el resultado

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} &= \lim_{r\to 0}\frac{r^2}{\sqrt{r^2+1}-1} = \lim_{r\to 0}\frac{2r}{\frac{2r}{2\sqrt{r^2+1}}} \\ &= \lim_{r\to 0} 2\sqrt{r^2+1} = 2\end{aligned}$$

en donde hemos aplicando una vez la regla de L'Hopital.

Fundamentos de Matematicas.

2^a Prueba de Evaluación a Distancia. Enero 2013

1. Sea p_3 el polinomio de Taylor orden 3 de la función $f(x) = \cos x^2$ en el punto $x = 0$. Señale el valor $p_3(1)$.
(*a*) $p_3(1) = 1/2$ (*b*) $p_3(1) = 1$ (*c*) $p_3(1) = 1/3$ (*d*) Ninguna de las anteriores

2. Señale el valor de la integral $I = \int_0^\pi \operatorname{sen} 2x \cos 3x dx$
(*a*) $I = 2/3$ (*b*) $I = 0$ (*c*) $I = -4/5$ (*d*) Ninguna de las anteriores

3. Señale el valor del siguiente límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{(x+y)^2}$
(*a*) No existe (*b*) $1/2$ (*c*) 2 (*d*) Ninguna de las anteriores

4. Señale el valor de la integral $I = \int_M (6x^2y^3 - 5y^4) dxdy$ en donde $M = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 1\}$.
(*a*) $I = 19/2$ (*b*) $I = 17/2$ (*c*) $I = 21/2$ (*d*) Ninguna de las anteriores

5. Sea P_3 el polinomio de Taylor de orden 3 de la función $f(x,y) = xy^4$ en el punto $(1,1)$. Señale el valor $P_3(1,2)$
(*a*) $P_3(1,2) = 17$ (*b*) $P_3(1,2) = 15$ (*c*) $P_3(1,2) = 16$ (*d*) Ninguna de las anteriores

6. Señale un intervalo I en donde la función
$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t+t^2}$$
es convexa
(*a*) $I = (10,20)$ (*b*) $I = (1,3)$ (*c*) $I = (1/2,1)$ (*d*) Ninguna de las anteriores

7. Dada la función
$$g(x) = \int_0^x x f(t) dt$$
en donde suponemos f es una función infinitamente derivable. Calcule la expresión de la derivada segunda $g''(x)$.
(*a*) $g''(x) = 2f'(x) + f''(x)$
(*b*) $g''(x) = f(x) + xf'(x)$
(*c*) $g''(x) = xf(x)$
(*d*) Ninguna de las anteriores

8. Sea la función de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z) = (2xy^2 - z^2,\ x^2 + 2yxz,\ y^2 - 2zx)$. Señálese el valor de su determinante jacobiano en el punto $(-1,1,-1)$.
(*a*) -12 (*b*) -16 (*c*) -24 (*d*) Ninguna de las anteriores

9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase uno y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Si $h = f \circ g$, $f'(3) = 7$ y $f''(3) = -2$, determínese $\|\nabla h(1,1,1)\|^2$.
(*a*) 586 (*b*) 588 (*c*) 590 (*d*) Ninguna de las anteriores

10. Señale el valor de la integral $I = \int_M y^2 e^{x/y} dxdy$, donde $M = \{(x,y) : y \leq x \leq y^3, 1 \leq y \leq 2\}$.
(*a*) $I = (e^4 - e)/3$ (*b*) $I = (e^4 - 4e)/2$ (*c*) $I = (6e^4 - 15e)/4$ (*d*) Ninguna de las anteriores

Solución de la prueba de evaluación a distancia de enero de 2013

1. **Solución (b)**

Calculamos el valor de las derivadas en el punto $x = 0$

$$\begin{aligned}
f(0) &= [\cos x^2]_{x=0} = 1 \\
f'(0) &= \left[\frac{d \cos x^2}{dx}\right]_{x=0} = [-2x \sin x^2]_{x=0} = 0 \\
f''(0) &= \left[\frac{d^2 \cos x^2}{dx^2}\right]_{x=0} = [-2\sin x^2 - 4x^2 \cos x^2]_{x=0} = 0 \\
f'''(0) &= \left[\frac{d^3 \cos x^2}{dx^3}\right]_{x=0} = [8x^3 \sin x^2 - 12x \cos x^2]_{x=0} = 0
\end{aligned}$$

Por tanto el polinomio de Taylor de orden 3, viene dado por

$$p_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} = 1$$

con lo que

$$p_3(1) = 1.$$

2. **Solución (c)**

Se calcula teniendo en cuenta la siguiente identidad trigonométrica conocida

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{2}$$

De esta manera

$$\operatorname{sen}2x\cos 3x = \frac{\operatorname{sen}(5x) + \operatorname{sen}(-x)}{2} = \frac{\operatorname{sen}(5x) - \operatorname{sen}(x)}{2}$$

y podemos integrar directamente

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \operatorname{sen}2x\cos 3x dx &= \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(5x) - \operatorname{sen}(x)}{2} dx = \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{2} dx - \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(x)}{2} \\
&= \left[\frac{-\cos(5x)}{10}\right]_{x=0}^{x=\pi} - \left[\frac{-\cos(x)}{2}\right]_{x=0}^{x=\pi} = \\
&= \frac{-\cos(5\pi) + \cos(0)}{10} - \frac{-\cos(\pi) + \cos(0)}{2} \\
&= \frac{2}{10} - 1 = \frac{-8}{10} = \frac{-4}{5}
\end{aligned}$$

3. **Solución (a)**

El límite no existe, ya que podemos tomar dos sucesiones $(a_n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \end{pmatrix}$, $(b_n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$, ambas tendiendo a $(0,0)$. Por el teorema de caracterización del límite, la sucesiones $f(a_n)$, $f(b_n)$ tienen que tender al límite pedido en caso de existir. Pero, en este caso

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(\begin{matrix} \frac{1}{n} & 0 \end{matrix}) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0\ , \\
&\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} f(\begin{matrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{matrix}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\frac{1}{n}}{(\frac{1}{n}+\frac{1}{n})^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\frac{1}{n}}{(\frac{2}{n})^2} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{n^2}{4n^2} = \tfrac{1}{4},
\end{aligned}$$

Como el límite, de existir, es único; concluímos que no existe.

4. **Solución (c)** Integramos directamente

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^3 (6x^2y^3 - 5y^4) dx dy &= \int_0^1\int_0^3 6x^2y^3 dx dy - \int_0^1\int_0^3 5y^4 dx dy = \\
&= \left(\int_0^1 y^3 dy\right)\left(\int_0^3 6x^2 dx\right) - \left(\int_0^1 5y^4\right)\left(\int_0^3 dx\right) \\
&= \left[\frac{y^4}{4}\right]_{y=0}^{y=1}\left[\frac{6x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=3} - \left[\frac{5y^5}{5}\right]_{y=0}^{y=1} 3 \\
&= \frac{1}{4}\frac{6\cdot 3^3}{3} - 3 = \frac{27}{2} - 3 = \frac{21}{2}
\end{aligned}$$

5. **Solución (b)**

Calculamos el valor de las derivadas en el punto $(x,y) = (1,1)$

$$
\begin{aligned}
&f(1,1) = [xy^4]_{(x,y)=(1,1)} = 1\\
&D_1 f(1,1) = [y^4]_{(x,y)=(1,1)} = 1\\
&D_2 f(1,1) = [4xy^3]_{(x,y)=(1,1)} = 4\\
&D_{11} f(1,1) = [0]_{(x,y)=(1,1)} = 0\\
&D_{12} f(1,1) = [4y^3]_{(x,y)=(1,1)} = 0\\
&D_{22} f(1,1) = [12xy^2]_{(x,y)=(1,1)} = 12\\
&D_{111} f(1,1) = [0]_{(x,y)=(1,1)} = 0\\
&D_{112} f(1,1) = [0]_{(x,y)=(1,1)} = 0\\
&D_{122} f(1,1) = [12y^2]_{(x,y)=(1,1)} = 12\\
&D_{222} f(1,1) = [24xy]_{(x,y)=(1,1)} = 24
\end{aligned}
$$

El polinomio de Taylor viene dado por

$$
\begin{aligned}
P_3(x,y) \;\; = \;\; & f(1,1) + D_1 f(1,1)(x-1) + D_2 f(1,1)(y-1)\\
&+\frac{1}{2!}\,\big(D_{11} f(1,1)(x-1)^2 + 2D_{12} f(1,1)(x-1\big)\,(y-1)\\
&+D_{22} f(1,1)(y-1)^2)\\
&+\frac{1}{3!}\,\big(D_{111} f(1,1)(x-1)^3 + 3D_{112} f(1,1)(x-1\big)^2\,(y-1)\\
&+3D_{122} f(1,1)(x-1)(y-1)^2\\
&+D_{222} f(1,1)(y-1)^3)
\end{aligned}
$$

Sustituyendo en el punto $(x,y) = (1,2)$

$$
\begin{aligned}
P_3(1,2) \;\; &= \;\; f(1,1) + D_2 f(1,1) + \frac{1}{2!} D_{22} f(1,1) + \frac{1}{3!} D_{222} f(1,1)\\
&= \;\; 1 + 4 + \frac{1}{2} 12 + \frac{1}{6} 24 = 15
\end{aligned}
$$

6. **Solución (d)**

Por el teorema fundamental del cálculo la derivada primera viene dada por

$$
f'(x) = \frac{1}{1+x+x^2}
$$

La segunda derivada es

$$
f''(x) = \frac{-(1+2x)}{(1+x+x^2)^2}
$$

Como

$$
\begin{aligned}
f''(x) \;\; &= \;\; \frac{-(1+2x)}{(1+x+x^2)^2} > 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{-(1+2x)}{(1+x+x^2)^2} > 0\\
&\Leftrightarrow \;\; -(1+2x) > 0 \Leftrightarrow \; x < -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

La función es convexa en el cualquier intervalo (a,b), tal que $b < -\frac{1}{2}$. Ninguno de los intervalos propuestos lo verifica.

7. **Solución (b)**

Por el teorema fundamental del cálculo

$$
g'(x) = xf(x)
$$

y por tanto su derivada segunda

$$
g''(x) = f(x) + xf'(x)
$$

8. **Solución (c)**

La matriz jacobiana de la función en el punto es

$$\begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy & -2z \\ 2x+2yz & 2xz & 2yx \\ -2z & 2y & -2x \end{pmatrix}_{(-1,1,-1)} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

y su determinante es -24.

9. **Solución (b)**

La función compuesta es $h(x,y,z) = f(x^2+y^2+z^2)$. Por la regla de la cadena $Dh(x,y,z) = Df(g(x,y,z)) \circ Dg(x,y,z)$, en este caso

$$Dh(1,1,1) = Df(g(1,1,1)) \circ Dg(1,1,1).$$

Por un lado $g(1,1,1) = 3$, $Df(g(1,1,1)) = f'(3) = 7$ y por otro $Dg(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$, con lo que $Dg(1,1,1) = (2,2,2)$. Entonces resulta

$$Dh(1,1,1) = 7(2\ 2\ 2) = (14\ 14\ 14),$$

es decir $\nabla h(x,y,z) = (14,14,14)$ y se tiene $\|\nabla h(1,1,1)\|^2 = 588$.

10. **Solución (c)**

Integrando

$$I = \int_1^2 dy \int_y^{y^3} y^2 e^{\frac{x}{y}} dx = \int_1^2 \left[y^3 e^{\frac{x}{y}} \right]_{x=y}^{x=y^3} dy = \int_1^2 \left(y^3 e^{y^2} - y^3 e \right) dy$$

La integral $\int_1^2 y^3 e^{y^2} dy$ se cálcula aplicando la fórmula de integración por partes (Recordemos fórmula $\int_a^b u'v dy = [uv]_{y=a}^{y=b} - \int_a^b uv' dy$). En este caso haciendo $u' = ye^{y^2}$, $v = y^2$, se tiene $u = \dfrac{e^{y^2}}{2}$, $v' = 2y$. Aplicando la fórmula

$$\begin{aligned} \int_1^2 y^3 e^{y^2} dy &= \left[\frac{e^{y^2} y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=2} - \int_1^2 y e^{y^2} dy = \left[\frac{e^{y^2} y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=2} - \left[\frac{e^{y^2}}{2} \right]_{y=1}^{y=2} = \\ &= \left[\frac{e^{y^2}(y^2-1)}{2} \right]_{y=1}^{y=2} = \frac{3e^4}{2} \end{aligned}$$

Integrando directamente

$$\int_1^2 y^3 e dy = \left[\frac{ey^4}{4} \right]_{y=1}^{y=2} = \frac{15e}{4}$$

Por tanto

$$I = \frac{3e^4}{2} - \frac{15e}{4} = \frac{6e^4 - 15e}{4}$$

Fundamentos de Matematicas.

1^a **Prueba de Evaluación a Distancia**

- Se debe marcar una sola respuesta correcta. Cada pregunta acertada suma 1 punto, las incorrectas restan 0.3. Las preguntas en blanco no puntúan.
- Las preguntas deben ser contestadas en el cuestionario virtual al que se accede a través del link "*Cuestionario: Primera prueba de evaluación a distancia online.*".
- Recuerde que dentro del examen virtual las respuestas deben ser marcadas en la pestaña correspondiente.
- El cuestionario virtual estara disponible los días 12, 13 ,14, 15 y 16 de diciembre.

1. Considere la operación $*$ sobre el conjunto de los números reales $M = \mathbb{R}$ definida por

$$a * b = (a-1)\cdot(b-1) \text{ para todo } a, b \in \mathbb{R}.$$

en donde $\cdot$ denota el producto usual de números reales. De las siguientes afirmaciones, señale la respuesta correcta

(a) $*$ es conmutativa (b) El elemento inverso de $a = 1$ viene dado por $a' = 1$
(c) El elemento neutro de $*$ viene dado por $e = 1$ (d) Ninguna de las anteriores

2. Considere la operación $*$ sobre el conjunto $M = \mathbb{M}_2$ de las matrices cuadradas de orden 2 definida por

$$A * B = B^T \times A^T \text{ para todo } A, B \in \mathbb{M}_2,$$

en donde $\times$ denota el producto usual de matrices. De las siguientes afirmaciones, señale la respuesta correcta

(a) $*$ es conmutativa (b) $*$ es asociativa
(c) $*$ posee elemento neutro (d) Ninguna de las anteriores

3. Sea el sistema lineal de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + hx_2 = 2 \\ 4x_1 - 8x_2 = k \end{array}\right\},$$

en donde h, $k \in \mathbb{R}$ parámetros reales. Señale todos los valores h, k para los que el sistema no tiene solución.

(a) $h = -2$, $k \in \mathbb{R}$ (b) $h = -2$, $k \leq 0$ (c) $h = -2$, $k \neq 8$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Sean $A, B \in \mathbb{M}_n$ matrices cuadradas de orden n y $\alpha \in \mathbb{R}$ un escalar real. De las siguientes afirmaciones:

   - $\det(\alpha A) = \alpha \det A$.
   - $\det(AB) = \det(BA)$.
   - $\det(A) = \det(PAP^{-1})$ para todo matriz regular $P \in \mathbb{M}_n$.
   - Si $\det(A^4) = 0$, entonces A es una matriz regular.

Señale el número de ellas qué son ciertas

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) Ninguna de las anteriores

5. Sean las bases

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \{(1,0,1), (-1,0,0), (0,1,1)\} \\ \mathbf{B} &= \{(1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\} \end{aligned}$$

de $\mathbb{R}^3$. Dado el vector $\mathbf{v}$ de coordenadas $(1,1,1)$ en la base $\mathbf{A}$, señale sus coordenadas en la base $\mathbf{B}$.
(a) $(0,1,2)$ (b) $(-1,-2,3)$ (c) $(1,1,0)$ (d) Ninguna de las anteriores

6. Consideramos el espacio vectorial de polinomios de grado 2, $\mathbb{P}_2 = \{\mathbf{p}(x) = a_2x^2+a_1x+a_0 : a_i \in \mathbb{R}\}$ y la base de dicho espacio

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{p}_1(x) = x-1, \mathbf{p}_2(x) = x^2-1,\ \mathbf{p}_3(x) = -1\}$$

Dado el polinomio $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = x^2+x+1$ señale su vector de coordenadas con respecto a la base $\mathbf{A}$.
(a) $(1,1,-3)$ (b) $(1,-2,1)$ (c) $(3,-2,1)$ (d) Ninguna de las anteriores

7. Sea $\mathbb{E}$ el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por el sistema

$$\mathbf{S} = \{(1,1,0),(1,2,3)\}$$

Señale sus ecuaciones implícitas.
(a) $\mathbb{E} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x-y+2z=0\}$
(b) $\mathbb{E} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-y+2z=0\}$
(c) $\mathbb{E} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-y+z=0\}$
(d) Ninguna de las anteriores

8. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1, x_1+x_2-x_3)$$

Señale la dimensión de $\mathrm{Im} f$
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) Ninguna de las anteriores

9. Consideramos la misma aplicación lineal que el ejercicio anterior y asumimos que está referida a la base canónica. Señale la matriz asociada a dicha aplicación si consideramos el cambio a la base $\mathbf{B} = \{(1,-1),(1,0)\}$ en el espacio imagen.
(a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
(c) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (d) Ninguna de las anteriores

10. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x_1,x_2) = (x_1+x_2, 0)$$

respecto de la base canónica. Señale, si existe, una base $\mathbf{B}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que su matriz asociada es diagonal.
(a) $\mathbf{B} = \{(0,-1),(1,1)\}$ (b) $\mathbf{B} = \{(1,0),(1,-1)\}$
(c) $\mathbf{B} = \{(1,-1),(0,-1)\}$ (d) Ninguna de las anteriores

FMI. SOLUCIONES PED Dic2013

1. **Solución. (a)**

- $*$ es conmutativa por la conmutatividad del producto de los reales

$$a * b = (a-1)\cdot(b-1) = (b-1)\cdot(a-1) = b * a \text{ para todo } a, b \in \mathbb{R}.$$

- No existe elemento neutro, si existiese un elemento neutro e entonces para el elemento $a = 1$ se verificaría

$$1 * e = 1 \Leftrightarrow 0 \cdot (e-1) = 1$$

lo que implica $0 = 1$, que es imposible. Y por tanto no existe neutro, ni inverso de $a = 1$.

2. **Solución. (d)**

- $*$ no es conmutativa. Considerando las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se tiene

$$\begin{aligned} A * B &= B^T \times A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ B * A &= A^T \times B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y por tanto $A * B \neq B * A$.

- $*$ no es asociativa. Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A * B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ B * C &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Asimismo

$$\begin{aligned} (A * B) * C &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ A * (B * C) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y por tanto

$$(A * B) * C \neq A * (B * C)$$

- $*$ no posee elemento neutro. Si existiese elemento neutro e entonces en primer lugar debería ser la matriz identidad

$$e * I = e \Leftrightarrow I^T \times e^T = I \Leftrightarrow e = I$$

Pero la matriz identidad no es elemento neutro. Por ejemplo tomando la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ se tendría

$$A * I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq A$$

3. **Solución. (c)** Por el teorema de Rouché-Frobenius, el sistema no tiene solución si el rango de la matriz del sistema y de su ampliada no coinciden, es decir

$$rango \begin{pmatrix} 1 & h \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \neq rango \begin{pmatrix} 1 & h & 2 \\ 4 & -8 & k \end{pmatrix}$$

Como

$$rango \begin{pmatrix} 1 & h \\ 4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 \text{ si } h \neq -2 \\ 1 \text{ si } h = -2 \end{cases}$$

podemos estudiar dos casos:

- Si $h \neq -2$, entonces para cualquier k que consideremos

$$rango \begin{pmatrix} 1 & h \\ 4 & -8 \end{pmatrix} = rango \begin{pmatrix} 1 & h & 2 \\ 4 & -8 & k \end{pmatrix} = 2$$

y el sistema tiene solución.

- Si $h = -2$, entonces para que el sistema no tenga solución se debe verificar

$$rango \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & -8 & k \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow rango \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & k \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow k \neq 8.$$

4. **Solución. (b)**

- $\det(\alpha A) = \alpha \det A$. No es cierta. Por ejemplo, si tomamos

$$\alpha = 2, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se tiene

$$\det(2A) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 \neq 2 = 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \det A$$

- $\det(AB) = \det(BA)$. Es cierta aplicando propiedades de determinantes

$$\det(A \times B) = \det A \cdot \det B = \det B \cdot \det A = \det(B \times A)$$

- $\det(A) = \det(PAP^{-1})$ para todo matriz regular $P \in \mathbb{M}_n$. También es cierta

$$\begin{aligned} \det(PAP^{-1}) &= \det P \det A \det P^{-1} = \det P \det A \frac{1}{\det P} \\ &= \det A \end{aligned}$$

- Si $\det(A^4) = 0$, entonces A es una matriz regular. Claramente no se cumple. Basta pensar en la matriz nula $A = O$, no es regular y $\det(O^4) = \det(O) = 0$.

5. **Solución.** **(b)** El vector $\mathbf{v}$ tiene como coordenadas respecto de la base canónica el vector

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Como la matriz de cambio de base de la base canónica a la base $\mathbf{B}$ viene dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

el vector de coordenadas buscado es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

6. **Solución.** **(a)** Aunque se puede hacer directamente, podemos trabajar con los espacios de coordenadas asociados. Respecto de la base usual $\mathbf{B} = \{\mathbf{p}_1(x) = 1, \mathbf{p}_2(x) = x, \mathbf{p}_3(x) = x^2 : a_i \in \mathbb{R}\}$ el polinomio $\mathbf{p}$ tiene como vector de coordenadas $(1, 1, 1)$. Como la matriz de cambio de base de $\mathbf{B}$ a $\mathbf{A}$ es directametnte

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

el vector de coordenadas buscado viene dado por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Efectivamente

$$(x - 1) + (x^2 - 1) - 3(-1) = x^2 + x + 1$$

7. **Solución.** **(d)** Las ecuaciones paramétricas del sistema son

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 + \lambda_2 \\ y &= \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ z &= 3\lambda_2 \end{aligned}$$

La ecuación implícita se halla restando la segunda ecuación a la primera y posteriormente sumándosela a tercera multiplicada por el factor $1/3$

$$x - y + \frac{1}{3}z = \lambda_1 + \lambda_2 - (\lambda_1 + 2\lambda_2) + \frac{1}{3}3\lambda_2 = 0 \Leftrightarrow 3x - 3y + z = 0$$

8. **Solución.** **(b)** Directamente las ecuaciones del núcleo son

$$x_1 = 0,\ x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

Sustituyendo para un vector genérico tenemos

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El vector $\{(0,1,1)\}$ es un sistema generador linealmente independiente y por tanto base del núcleo. La dimensión del núcleo es 1 y por el teorema de la dimensión

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker f = 3 - 1 = 2$$

9. **Solución.** **(c)** Denotemos por $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$ las coordenadas respecto de la base canónica y $\mathbf{B}$ respectivamente. En general tenemos que

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

La matriz de cambio de la base canónica a la base $\mathbf{B}$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

y por tanto

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

es la matriz asociada respecto a la nueva referencia.

10. **Solución.** **(b)** La matriz asociada a la aplicación es $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y su ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda = 0$$

que tiene como raíces $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$. Como son dos autovalores distintos, la matriz es diagonalizable y los subespacios asociados tienen dimensión 1. El subespacio asociado a la raíz $\lambda_1 = 0$ es

$$\mathbb{E}_1 = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\},$$

mientras que el subespacio asociado a la raíz $\lambda_2 = 1$ es

$$\mathbb{E}_2 = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}.$$

La base buscada tiene que tener un vector de cada subespacio. De las bases propuestas, $\{(1,0),(1,-1)\}$ es la única que la verifica.

Fundamentos de Matematicas.

2^a Prueba de Evaluación a Distancia

- Se debe marcar una sola respuesta correcta. Cada pregunta acertada suma 1 punto, las incorrectas restan 0.3. Las preguntas en blanco no puntúan.
- Las preguntas deben ser contestadas en el cuestionario virtual al que se accede a través del link "*Cuestionario: Primera prueba de evaluación a distancia online.*".
- Recuerde que dentro del examen virtual las respuestas deben ser marcadas en la pestaña correspondiente.
- El cuestionario virtual estara disponible los días 10, 11 ,12, y 13 de enero.

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que

$$\nabla f(x, y, z) = (\operatorname{sen}(x+y)^2, \operatorname{sen}(x+y)^2, 1)$$

y sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x, 2x, x)$. Señálese $g'(x)$.

(a) $(2\operatorname{sen} x^2, 2\operatorname{sen} x^2, 1)$ (b) $3\operatorname{sen} 9x^2 + 1$
(c) $6\operatorname{sen} 9x^2 + 1$ (d) Ninguna de las anteriores

2. Señale el valor de la siguiente integral

$$I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

(a) $(1 - \ln 2)/2$ (b) $(1 + \ln 2)/2$ (c) 0 (d) Ninguna de las anteriores

3. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$F(x) = \int_1^{x^2+x} s^2 e^s ds.$$

Señale el valor de la derivada $F'(1)$.

(a) $e\,(2e - 1)$ (b) $12e^2$ (c) $e(e + 1)$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = x^2 \left| x - 4 \right|.$$

Señale un máximo relativo de f.

(a) $x = 4$ (b) $x = 0$ (c) $x = \frac{8}{3}$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Señale el valor de la integral $I = \int_M e^{(x^2+y^2)} dxdy$ en donde

$$M = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

(a) $\frac{\pi e}{8}(e^8 - 1)$ (b) $\frac{\pi e}{4}(e^8 - 1)$ (c) 0 (d) Ninguna de las anteriores

6. Señale el valor del límite

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

(a) El límite no existe (b) $L = 1/2$ (c) $L = 0$ (d) Ninguna de las anteriores

7. Calcule la integral $I = \int_0^1 \int_x^1 e^{y^2} dydx$ considerando un cambio en el orden de integración.
(a) $I = e$ (b) $I = \frac{1}{2}(e+1)$ (c) $I = \frac{1}{2}(e-1)$ (d) Ninguna de las anteriores

8. Sea la función
$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$
Dadas las siguientes afirmaciones
- $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ es un máximo relativo
- $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ es un mínimo relativo.
- $(0,0)$ es un mínimo relativo.
- $(0,0)$ es un mínimo global.

Señale el número de ellas qué son ciertas.
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) Ninguna de las anteriores

9. Consideramos la misma función f del ejercicio anterior. Sea P_2 el polinomio de Taylor de orden 2 de dicha función f en el punto $(1,1)$. Señale el error que se comete, tomado en valor absoluto, al sustituir $f(1,0)$ por su valor aproximado $P_2(1,0)$.
(a) 0 (b) 6 (c) 3 (d) Ninguna de las anteriores

10. Señale el valor del siguiente límite
$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{n+1}{n}}{\ln \frac{n+2}{n+1}}$$
(a) $L = 0$ (b) $L = 1$ (c) $L = \infty$ (d) Ninguna de las anteriores

FMI. SOLUCIONES PED Ene2013

1. **Solución. (b)** La función g es la composición de la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $h(x) = (x, 2x, x)$. y la función f. Por la regla de la cadena

$$\begin{aligned} g'(x) &= Df(x, 2x, x)Dh(x) = \\ &= \big(\operatorname{sen}(3x)^2, \operatorname{sen}(3x)^2, 1\big)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\operatorname{sen} 9x^2 + 1. \end{aligned}$$

2. **Solución. (a)** Es una integral por partes que se resuelve aplicando la fórmula

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx$$

en donde en este caso

$$\begin{aligned} &u = \ln x,\ u' = \frac{1}{x}, \\ &v' = x^{-2}\ v = -x^{-1}. \end{aligned}$$

De esta manera

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx &= \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_{x=1}^{x=2} - \int_1^2 \frac{-1}{x}\frac{1}{x}dx \\ &= -\frac{\ln 2}{2} + 0 + \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx \\ &= -\frac{\ln 2}{2} + \left[\frac{-1}{x}\right]_{x=1}^{x=2} \\ &= -\frac{\ln 2}{2} - 1 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1 - \ln 2}{2} \end{aligned}$$

3. **Solución. (b)** La función F se puede expresar como la composición de dos funciónes

$$F(x) = g(h(x))$$

en donde $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ están definidas por

$$g(t) = \int_1^t s^2 e^s ds,\ h(x) = x^2 + x.$$

Por la regla de la cadena

$$F'(1) = g'(h(1)) \cdot h'(1)$$

En este caso teniendo en cuenta el primer teorema fundamental del cálculo (véase p. 208 libro de texto), se tiene

$$g'(t) = t^2 e^t.$$

Como además $h(1) = 2$, $h'(1) = [2x + 1]_{x=1} = 3$, se tiene

$$F'(1) = g'(2) \cdot h'(1) = 2^2 e^2 3 = 12e^2.$$

4. **Solución.** **(c)** La función está definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} x^2(x-4) \text{ si } x \geq 4 \\ x^2(4-x) \text{ si } x < 4 \end{cases}$$

La función derivada está definida en todo punto salvo en $x = 4$,

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 8x \text{ si } x > 4 \\ 8x - 3x^2 \text{ si } x < 4 \end{cases}$$

Los puntos críticos $f'(x) = 0$ vienen dados por $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{8}{3}$. Como

$$\begin{array}{l} f''(0) = [8-6x]_{x=0} = 8 > 0, \\ f''(\frac{8}{3}) = [8-6x]_{x=\frac{8}{3}} = 8 - 6\frac{8}{3} = -8 < 0, \end{array}$$

los puntos $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{8}{3}$ son respectivamente un mínimo y un máximo relativo. Además en el punto $x = 4$ hay un mínimo relativo ya que $f(4) = 0$ y la función $f(x) = x^2 |x-4| \geq 0$ es positiva para todo punto $x \in \mathbb{R}$.

5. **Solución.** **(b)** Se resuelve aplicando un cambio a polares

$$x = r\cos\theta,\ y = rsen\theta,\ dxdy = rdrd\theta$$

En este caso M se corresponde con una semicorona circular de radios $r = 1$, $r = 3$ en el primer cuadrante $(x, y \geq 0)$. En coordenadas polares

$$\begin{aligned} M &= \{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0\} = \\ &= \left\{(r,\theta) : 1 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\} \end{aligned}$$

Aplicando dicho cambio

$$\begin{aligned} \int_M e^{(x^2+y^2)} dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^3 e^{r^2} r dr d\theta = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right)\left(\int_1^3 e^{r^2} r dr\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\left[\frac{e^{r^2}}{2}\right]_{r=1}^{r=3} = \frac{\pi}{2}\frac{e^9 - e}{2} \\ &= \frac{\pi e}{4}\left(e^8 - 1\right) \end{aligned}$$

6. **Solución.** **(c)** El límite es una aplicación al cálculo de límites mediante cambio a coordenadas polares (véase p.282 libro de texto). Como $(x,y) \to (0,0)$ implica $r \to 0$ y se tiene la acotación

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|\frac{r^2\cos\theta sen\theta}{r}\right| = \left|\frac{r^2\frac{sen 2\theta}{2}}{r}\right| \leq r \underset{r\to 0}{\to} 0$$

que claramente es uniforme respecto del ángulo θ. Por tanto $L = 0$.

7. **Solución.** **(c)** La integral se corresponde con una integral

$$I = \int_M e^{y^2} dydx$$

en donde

$$\begin{aligned} M &= \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\, x \le y \le 1\} \\ &= \{(x,y) : 0 \le x \le y,\, 0 \le y \le 1\} \end{aligned}$$

Luego

$$I = \int_0^1 \int_0^y e^{y^2} dx dy = \int_0^1 e^{y^2} y dy = \left[\frac{e^{y^2}}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{e-1}{2}$$

8. **Solución.** **(a)** Aplicamos el caso particular para funciones de dos variables (véanse pp 260-1 libro de texto). Igualando las derivadas parciales primeras a cero

$$D_1 f(x,y) = 4x^3 - 4x + 4y = 0$$
$$D_2 f(x,y) = 4y^3 + 4x - 4y = 0$$

obtenemos el sistema cuya solución nos da los puntos críticos

$$x^3 - x + y = 0$$
$$y^3 + x - y = 0$$

Sumando ambas ecuaciones $x^3 + y^3 = 0 \Rightarrow x = -y$. Sustituyendo en la primera ecuación

$$x^3 - x - x = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0,\, x = \pm\sqrt{2}$$

Luego los puntos críticos viene dados por $\{(0,0), \left(\sqrt{2}. -\sqrt{2}\right), \left(-\sqrt{2}.\sqrt{2}\right)\}$. Las derivadas parciales segundas vienen dadas por

$$\begin{aligned} D_{11} f(x,y) &= 12x^2 - 4, \\ D_{12} f(x,y) &= 4 \\ D_{22} f(x,y) &= 12y^2 - 4 \end{aligned}$$

Y por tanto la Hessiana toma la forma general

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

En el punto $(x,y) = (0,0)$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

y como su determinante es nulo puede ser o no mínimo relativo en el punto. En este caso no lo es, ya que si tomamos la sucesión $x_n = (0, \frac{-1}{n}) \to 0$ y

$$\begin{aligned} f\left(0, -\frac{1}{n}\right) &= 0^4 + \left(-\frac{1}{n}\right)^4 - 2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 \left(-\frac{1}{n}\right) - 2\left(-\frac{1}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n^4} - \frac{2}{n^2} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{n^2} - 2\right) < f(0,0) \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Luego $(0,0)$ no es mínimo relativo ni por tanto global.
Por otro lado en los puntos $(x,y) = \left(\sqrt{2}. -\sqrt{2}\right)$, $(x,y) = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ la Hessiana coincide

$$Hf(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = Hf(-\sqrt{2}.\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

y definida positiva ya que $\Delta_1 = 20 > 0$, $\Delta_2 = 384 > 0$. Por tanto ambos puntos son mínimos relativos.

9. **Solución.** **(c)** Teniendo en cuenta las derivadas que calculamos en el ejercicio anterior, evaluamos en el punto $(x, y) = (1, 1)$

$$\begin{aligned}
&f(1,1) = 1 + 1 - 2 + 4 - 2 = 2,\\
&D_1 f(1,1) = 4 - 4 + 4 = 4,\\
&D_2 f(1,1) = 4 + 4 - 4 = 4,\\
&D_{11} f(1,1) = 12 - 4 = 8,\\
&D_{12} f(x,y) = 4,\\
&D_{22} f(x,y) = 12 - 4 = 8.
\end{aligned}$$

Obtenemos el polinomio de Taylor de order 2 aplicando directamente la fórmula

$$\begin{aligned}
P_2(x,y) &= f(1,1) + D_1 f(1,1)(x-1) + D_2 f(1,1)(y-1)\\
&\quad + \frac{1}{2}(D_{11} f(1,1)(x-1)^2 + 2D_{12} f(1,1)(x-1)(y-1) + D_{22} f(1,1)(y-1)^2)\\
&= 2 + 4(x-1) + 4(y-1) + \frac{1}{2}(8(x-1)^2 + 8(x-1)(y-1) + 8(y-1)^2)
\end{aligned}$$

Sustituyendo directamente en el punto $(1, 0)$

$$P_2(1,0) = 2 + 0 - 4 + \frac{1}{2}(0 + 0 + 8) = 2$$

Como $f(1, 0) = 1 + 0 - 2 + 0 - 0 = -1$, el error cometido en valor absoluto viene dada por la diferencia

$$|P_2(1,0) - f(1,0)| = |2 - (-1)| = 3.$$

10. **Solución.** **(b)** Haciendo el cambio $x = \dfrac{1}{n}$ podemos transformar dicho límite en un límite equivalente de funciones y aplicar la regla de L'Hopital. De esta manera

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{n+1}{n}}{\ln \frac{n+2}{n+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}}}{\ln \frac{\frac{1}{x}+2}{\frac{1}{x}+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{\ln(\frac{1+2x}{1+x})} =\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{\ln(1+2x) - \ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{2}{1+2x} - \frac{1}{1+x}}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{2(1+x)-(1+2x)}{(1+2x)(1+x)}} = \lim_{x\to 0} \frac{1+2x}{1} = 1.
\end{aligned}$$

Fundamentos de Matematicas.

1^a **Prueba de Evaluación a Distancia**

- Se debe marcar una sola respuesta correcta. Cada pregunta acertada suma 1 punto, las incorrectas restan 0.3. Las preguntas en blanco no puntúan.
- Las preguntas deben ser contestadas en el cuestionario virtual al que se accede a través del link "*Cuestionario: Primera prueba de evaluación a distancia online.*".
- Recuerde que dentro del examen virtual las respuestas deben ser marcadas en la pestaña correspondiente.
- El cuestionario virtual estara disponible los días 11, 12, 13, 14, y 15 de diciembre.

1. Sea $U = \{(x, y) : xy = 1\}$, y sean las operaciones $+, \cdot$ la suma de vectores y el producto por escalares usuales. Señale la respuesta correcta.
   (a) La suma de dos elementos de U pertenece a U (b) $(U, +)$ es un grupo conmutativo
   (c) $(U, +, \cdot)$ es subespacio vectorial (d) Ninguna de las anteriores

2. En este ejercicio suponemos que A,B, C, Z, X, Y son matrices cuadradas de orden n que suponemos de determinante no nulo. Siguiendo la notación usual O, I denotan respectivamente la matriz nula y la matriz identidad correspondiente. Consideramos la matriz por bloques definida de la siguiente manera

$$\Lambda = \begin{pmatrix} I & O & O \\ C & I & O \\ A & B & I \end{pmatrix}$$

   Señale la forma de la matriz inversa
   (a) $\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} I & O & O \\ C^{-1} & I & O \\ A^{-1} & B^{-1} & I \end{pmatrix}$ (b) $\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} I & C^{-1} & O \\ C & I & O \\ B^{-1}A & B-A & I \end{pmatrix}$
   (c) $\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} I & O & O \\ -C & I & O \\ -A+BC & -B & I \end{pmatrix}$ (d) Ninguna de las anteriores

3. Sea $\mathbb{P}_2$ el espacio vectorial de los polinomios de grado igual o menor a 2

$$\mathbf{p}(x) = ax^2 + bx + c.$$

   Consideremos las bases

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{p}_1(x) = x^2 - x + 1, \, \mathbf{p}_2(x) = x^2 + 1, \, \mathbf{p}_3(x) = 1\}$$
$$\mathbf{A}' = \{\mathbf{p}_1'(x) = -1, \, \mathbf{p}_2'(x) = -x^2, \, \mathbf{p}_3'(x) = x\}$$

   Señale el determinante de la matriz de cambio de base de $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}'$.
   (a) 0 (b) -1 (c) 1 (d) Ninguna de las anteriores

4. Consideramos la aplicación $F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ que a cada polinomio $\mathbf{p}$ le hace corresponder su función derivada $\mathbf{p}'$, es decir

$$F(\mathbf{p}) = \mathbf{p}'.$$

   Señale la matriz asociada de F con respecto de dicha base

$$\{\mathbf{p}_1(x) = 1, \mathbf{p}_2(x) = x, \, \mathbf{p}_3(x) = x^2\}$$

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x_1, x_2) = (3x_1, x_1 + 3x_2)$$

respecto de la base canónica. Señale, si existe, una base $\mathbf{B}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que su matriz asociada es diagonal.
(a) La matriz no es diagonalizable y por tanto no existe dicha base
(b) $\mathbf{B} =\{(1,0),(0,1)\}$ (c) $\mathbf{B} =\{(1,1),(0,-1)\}$ (d) Ninguna de las anteriores

6. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, señale la matriz potencia A^7. (Notación: $A^n = A \times A^{n-1}$ para todo $n = 2, 3, ...$).
(a) $A^7 = \begin{pmatrix} 64 & 64 \\ 64 & 64 \end{pmatrix}$ (b) $A^7 = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$
(c) $A^7 = \begin{pmatrix} 32 & 32 \\ 32 & 32 \end{pmatrix}$ (d) Ninguna de las anteriores

7. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y, z, t) = (t + x - y, 2x - t + y, y - t + z)$$

Determine las ecuaciones implícitas del subespacio núcleo Ker$f$.
(a) $\mathrm{Ker}f = \{(x, y, z, t) : x = 0,\ t = 0\}$
(b) $\mathrm{Ker}f = \{(x, y, z, t) : x = 0, z = 0\}$
(c) $\mathrm{Ker}f = \{(x, y, z, t) : x = 0\}$
(d) Ninguna de las anteriores

8. Sea la matriz

$$\begin{pmatrix} 2\alpha - \beta & 0 & 2\alpha - 2\beta \\ 1 & \alpha & 2 \\ -\alpha + \beta & 0 & -\alpha + 2\beta \end{pmatrix}$$

en donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ parámetros reales. Señale sus autovalores en función de los parámetros.
(a) $\lambda_1 = \alpha,\ \lambda_2 = -\alpha,\ \lambda_3 = \beta$ (b) $\lambda_1 = \alpha,\ \lambda_2 = \alpha,\ \lambda_3 = \beta$
(c) $\lambda_1 = \alpha,\ \lambda_2 = -\beta,\ \lambda_3 = -\beta$ (d) Ninguna de las anteriores

9. Sea $\mathbb{P}_2$ el espacio vectorial de los polinomios de grado igual o menor a 2 y sea $\varphi : \mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}$ la forma bilineal definida por

$$\varphi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{p}(0)\mathbf{q}(1) \text{ para todo } \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{P}_2.$$

Señale la matriz con respecto de la base

$$\mathbf{A} = \left\{\mathbf{p}_1(x) = 1,\ \mathbf{p}_2(x) = x,\ \mathbf{p}_3(x) = x^2 - 1\right\}$$

(a) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (d) Ninguna de las anteriores

10. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, x_1 + x_2, 0)$$

Señale una base del subespacio imagen $\mathrm{Im} f$.

(a) $\{(1,0,1),(0,1,0)\}$ (b) $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$

(c) $\{(1,0,-1),(0,1,0)\}$ (d) Ninguna de las anteriores

FMI. SOLUCIONES PED Dic2014

1. **Solución.** **(d)** Los elementos $\mathbf{a} = (1, 1)$, $\mathbf{b} = (-1, -1)$ pertenecen a U pero no su suma

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (1, 1) + (-1, -1) = (0, 0) \notin U$$

Por tanto la suma $+$ no es una operación sobre U y por tanto $(U, +)$ no es grupo ni $(U, +, \cdot)$ es un subespacio vectorial.

2. **Solución.** **(c)** Si consideramos $A_{ij} \in M_n$ matrices de orden n entonces la matriz por bloques

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \in M_{3n}$$

es una matriz de orden $3n$.

En este caso aplicando directamente el producto de matrices la fórmula del producto de matrices es la misma que en el caso general de matrices de números reales (correspondiente a $n = 1$) respectando en este caso el orden del producto al no verificarse a priori la propiedad conmutativa

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}$$
$$=$$
$$\begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} + A_{13}B_{32} & A_{11}B_{13} + A_{12}B_{23} + A_{13}B_{33} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} + A_{23}B_{31} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} + A_{23}B_{32} & A_{21}B_{13} + A_{22}B_{23} + A_{23}B_{33} \\ A_{31}B_{11} + A_{32}B_{21} + A_{33}B_{31} & A_{31}B_{12} + A_{32}B_{22} + A_{33}B_{32} & A_{31}B_{13} + A_{32}B_{23} + A_{33}B_{33} \end{pmatrix} \tag{1}$$

La matriz unidad $I_{3n} \in M_{3n}$ se puede descomponer por bloques

$$I_{3n} = \begin{pmatrix} I_n & O_n & O_n \\ O_n & I_n & O_n \\ O_n & O_n & I_n \end{pmatrix}$$

en donde I_n, $O_n \in M_n$ son las matrices unidad y nula de orden n respectivamente. Por definición de matriz inversa se tiene que verifica

$$\Lambda\Lambda^{-1} = \Lambda^{-1}\Lambda = I$$

Para el caso (c) aplicando directamente la fórmula (1)

$$\begin{pmatrix} I & O & O \\ C & I & O \\ A & B & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O & O \\ -C & I & O \\ -A+BC & -B & I \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I\times I+O\times C+O\times(-A+BC) & I\times O+O\times I+O\times -B \\ C\times I+I\times(-C)+O\times(-A+BC) & C\times O+I\times I+O\times -B \\ A\times I+B\times(-C)+I\times(-A+BC) & A\times O+B\times I+I\times -B \end{pmatrix.$$

$$\left. = \begin{matrix} I\times O+O\times O+O\times I \\ C\times O+I\times O+O\times I \\ A\times O+B\times O+I\times I \end{matrix} \right) = \begin{pmatrix} I & O & O \\ C-C & I & O \\ A-BC-A+BC & B-B & I \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I & O & O \\ C & I & O \\ O & O & I \end{pmatrix}$$

Del mismo modo se puede comprobar

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} I & O & O \\ -C & I & O \\ -A+BC & -B & I \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I & O & O \\ C & I & O \\ A & B & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & O & O \\ -C+C & I & O \\ -A+BC-BC+A & -B+B & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & O & O \\ O & I & O \\ O & O & I \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} I & O & O \\ -C & I & O \\ -A+BC & -B & I \end{pmatrix}$$

Por otro lado podemos descarta los casos (a) y (b) ya que en dichos casos

- $\begin{pmatrix} I & O & O \\ C & I & O \\ A & B & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O & O \\ C^{-1} & I & O \\ A^{-1} & B^{-1} & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O & O \\ C+C^{-1} & I & O \\ A+BC^{-1}+A^{-1} & B+B^{-1} & I \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} I & O & O \\ C & I & O \\ A & B & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & C^{-1} & O \\ C & I & O \\ B^{-1}A & B-A & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & C^{-1} & O \\ 2C & 2I & O \\ A+BC+B^{-1}A & AC^{-1}+2B-A & I \end{pmatrix}$

Y considerando el caso particular $n = 1$, en donde $I = (1)$, $O = (0)$, y tomando las matrices $A = B = C = (1)$ tenemos que

$$\begin{pmatrix} I & O & O \\ C+C^{-1} & I & O \\ A+BC^{-1}+A^{-1} & B+B^{-1} & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \neq I_3$$

lo que descarta (a) y

$$\begin{pmatrix} I & C^{-1} & O \\ 2C & 2I & O \\ A+BC+B^{-1}A & AC^{-1}+2B-A & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & O \\ 2 & 2 & O \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \neq I_3$$

lo que también descarta (b).

3. **Solución. (c)** Consideremos las bases

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{p}_1(x) = x^2 - x + 1,\ \mathbf{p}_2(x) = x^2 + 1,\ \mathbf{p}_3(x) = 1\}$$
$$\mathbf{A}' = \{\mathbf{p}_1'(x) = -1,\ \mathbf{p}_2'(x) = -x^2,\ \mathbf{p}_3'(x) = x\}$$

Para simplificar el razonamiento consideremos la base canónica

$$\mathbf{A}'' = \{\mathbf{p}_1(x) = 1,\ \mathbf{p}_2(x) = x,\ \mathbf{p}_3(x) = x^2\}$$

y denotemos por $X,\ X',\ X'' \in \mathbf{R}^3$ los vectores columnas de coordenadas de un vector genérico $\mathbf{p}$ respecto de $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$ y $\mathbf{A}''$ respectivamente. La matriz de cambio de base de $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}''$ viene dada por la matriz que tiene por columnas las coordenadas de los elementos de la base $\mathbf{A}$ con respecto a la base $\mathbf{A}'$(véase p. 63 libro de texto). En este caso se puede calcular directamente dicha matriz y por tanto la ecuación matricial de cambio de base

$$X'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X$$

Del mismo modo podemos considerar el cambio de coordenadas de $\mathbf{A}'$ a $\mathbf{A}''$

$$X' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X'$$

Igualando ambas expresiones

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X$$

y por tanto

$$X' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X.$$

Luego la matriz buscada es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y el determinante se calcula aplicando propiedades conocidas (véase sección 4 Cap 2 libro de texto)

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{-1} \cdot (-1) = 1$$

4. **Solución.** **(a)** Por definición de F a un polinomio $\mathbf{p}(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ le hace correponder como imagen su derivada

$$F(\mathbf{p})(x) = \mathbf{p}'(x) = 2a_2x + a_1$$

Respecto de la base canónica $\left\{\mathbf{p}_1(x) = 1,\ \mathbf{p}_2(x) = x,\ \mathbf{p}_3(x) = x^2\right\}$ los vectores columnas de coordenadas son

$$\mathbf{p} \equiv \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},\ F(\mathbf{p}) \equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Directamente

$$F(\mathbf{p}) \equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es la matriz asociada a la aplicación en dicha referencia.

5. **Solución.** **(a)** La matriz asociada a la aplicación viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2$$

tiene como raíz $\lambda_1 = 3$ con multiplicidad doble. Por otro lado las ecuaciones del subespacio $\mathbb{E}_1$ asociado al autovalor $\lambda_1 = 3$ vienen dadas por

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 3-3 & 0 \\ 1 & 3-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &x = 0. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\mathbb{E}_1 = \{(x,y) : x = 0\} = \{(0,y) : x = 0\} = G[(0,1)]$$

está generado por un solo vector y es por tanto de dimensión 1. Como la dimensión del subespacio no coincide con la multiplicidad, por el Teorema de caracterización (p. 99 libro de texto) la matriz no es diagonalizable.

6. **Solución.** **(a)** Veamos como se puede simplificar el cálculo si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable.

El polinomio característico

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda$$

tiene como raíces $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$. Como las raíces son distintas ya sabemos que la matriz es diagonalizable y que los subespacios asociados tienen dimensión 1. Luego basta tomar un vector no nulo de cada subespacio

El subespacio $\mathbb{E}_1$ asociado al autovalor $\lambda_1 = 0$ viene dado por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_1 &= \left\{(x,y) : \begin{pmatrix} 1-0 & 1 \\ 1 & 1-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \{(x,y) : x+y=0\} \\ &= G[(1,-1)] \end{aligned}$$

El subespacio $\mathbb{E}_2$ asociado al autovalor $\lambda_2 = 2$ viene dado por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_2 &= \left\{(x,y) : \begin{pmatrix} 1-2 & 1 \\ 1 & 1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \{(x,y) : x-y=0\} \\ &= G[(1,1)] \end{aligned}$$

La base de vectores propios $\mathbf{B} = \{(1,-1),(1,1)\}$, luego la matriz de paso viene dada

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Esta matriz verifica

$$A = Q^{-1}DQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

en donde $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ es la matriz con diagonal los correspondientes autovalores. Las potencias sucesivas se pueden calcular iterativamente

$$\begin{aligned} &A^2 = Q^{-1}DQQ^{-1}DQ = Q^{-1}D^2Q \\ &A^3 = Q^{-1}DQA^2 = Q^{-1}DQQ^{-1}D^2Q = Q^{-1}D^3Q \\ &\vdots \\ &A^n = Q^{-1}DQA^{n-1} = Q^{-1}DQQ^{-1}D^{n-1}Q = Q^{-1}D^nQ \end{aligned}$$

y por inducción se ve que

$$A^n = Q^{-1}D^nQ \tag{2}$$

La potencia de una matriz diagonal a un exponente entero es otra diagonal con diagonal los mismos elementos elevados al exponente

$$D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuesta esto, la fórmula (2) nos permite calcular de manera sencilla cualquier potencia de la matriz. Para el caso pedido $n = 7$

$$\begin{aligned} A^7 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2^7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2^7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 64 & 64 \\ 64 & 64 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7. **Solución.** **(d)** La matriz asociada a la aplicación es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $\mathrm{Ker} f = \{X \in \mathbb{R}^4 : AX = O\}$ se trata de resolver el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como rango $A = 2$, es un sistema lineal compatible inderteminado con un parámetro cuya conjunto de soluciones es

$$\{(x, y, z, t) = \{(0, \lambda, 0, \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Por tanto las ecuación paramétricas son

$$x = 0,\ y = \lambda,\ z = 0,\ t = \lambda$$

y de ahí trivialmente obtenemos que las ecuaciones implícitas del subespacio son

$$x = 0,\ z = 0,\ y = t$$

8. **Solución.** **(b)** El polinomio característico viene dado por

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \begin{vmatrix} 2\alpha - \beta - \lambda & 0 & 2\alpha - 2\beta \\ 1 & \alpha - \lambda & 2 \\ -\alpha + \beta & 0 & -\alpha + 2\beta - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\alpha - \lambda) \begin{vmatrix} 2\alpha - \beta - \lambda & 2\alpha - 2\beta \\ -\alpha + \beta & -\alpha + 2\beta - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\alpha - \lambda) \left[(2\alpha - \beta - \lambda)(-\alpha + 2\beta - \lambda) - (\beta - \alpha)(2\alpha - 2\beta)\right] \\ &= (\alpha - \lambda) \left(\lambda^2 - (\alpha + \beta)\lambda + \alpha\beta\right) \end{aligned}$$

La raíces del polinomio $\lambda^2 - (\alpha + \beta)\lambda + \alpha\beta$, se determinan directamente la ecuación de segundo segundo grado

$$\lambda^2 - (\alpha + \beta)\lambda + \alpha\beta = 0.$$

Los autovalores vienen dados

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{\alpha+\beta\pm\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}}{2} = \frac{\alpha+\beta\pm\sqrt{(\alpha-\beta)^2}}{2} \\ &= \frac{\alpha+\beta\pm(\alpha-\beta)}{2} = \begin{cases}\lambda_1=\alpha, \\ \lambda_2=\beta.\end{cases}\end{aligned}$$

y por tanto $\lambda^2-(\alpha+\beta)\lambda+\alpha\beta=(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)$. Luego finalmente

$$p(\lambda)=(\alpha-\lambda)\left(\lambda^2-(\alpha+\beta)\lambda+\alpha\beta\right)=(\alpha-\lambda)\,(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)$$

y los autovalores son $\lambda=\alpha$(multiplicidad doble) y $\lambda=\beta$.

9. **Solución. (c)** La matriz asociada respecto de la base viene en general dada por

$$A=\begin{pmatrix}\varphi(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_1) & \varphi(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2) & \varphi(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_3) \\ \varphi(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_1) & \varphi(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_2) & \varphi(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3) \\ \varphi(\mathbf{p}_3,\mathbf{p}_1) & \varphi(\mathbf{p}_3,\mathbf{p}_2) & \varphi(\mathbf{p}_3,\mathbf{p}_3)\end{pmatrix}$$

(véase p. 114 libro de texto). Basta por tanto aplicar la definición de φ para hallar la matriz

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix}\mathbf{p}_1(0)\mathbf{p}_1(1)=1 & \mathbf{p}_1(0)\mathbf{p}_2(1)=1 & \mathbf{p}_1(0)\mathbf{p}_3(1)=0 \\ \mathbf{p}_2(0)\mathbf{p}_1(1)=0 & \mathbf{p}_2(0)\mathbf{p}_2(1)=0 & \mathbf{p}_2(0)\mathbf{p}_3(1)=0 \\ \mathbf{p}_3(0)\mathbf{p}_1(1)=-1 & \mathbf{p}_3(0)\mathbf{p}_2(1)=-1 & \mathbf{p}_3(0)\mathbf{p}_3(1)=0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

10. **Solución. (b)** Un vector genérico $(y_1,y_2,y_3)\in \operatorname{Im} f$ se puede expresar como

$$(y_1,y_2,y_3)=(2x_1,x_1+x_2,0)=x_1(2,1,0)+x_2(0,1,0).$$

Las ecuaciones parámetricas de $\operatorname{Im} f$ vienen dadas por

$$\begin{aligned}y_1 &= 2\lambda_1 \\ y_2 &= \lambda_1+\lambda_3 \\ y_3 &= 0\end{aligned}$$

De aquí trivialmente las ecuaciones implícitas vienen dadas por

$$y_3=0.$$

La dimensión de $\operatorname{Im} f$, luego cualquier par de vectores linealmente independientes verificando $y_3=0$ constituye una base. De los propuestos solamente $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ cumple las dos propiedades y por tanto **(b)** es la respuesta correcta.

Fundamentos de Matematicas.

2^a Prueba de Evaluación a Distancia

- Se debe marcar una sola respuesta correcta. Cada pregunta acertada suma 1 punto, las incorrectas restan 0.3. Las preguntas en blanco no puntúan.
- Las preguntas deben ser contestadas en el cuestionario virtual al que se accede a través del link "*Cuestionario: Primera prueba de evaluación a distancia online.*".
- Recuerde que dentro del examen virtual las respuestas deben ser marcadas en la pestaña correspondiente.
- El cuestionario virtual estara disponible los días 15, 16, 17, 18 y 19 de enero

1. De la siguiente lista de funciones

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^3 + 3xy^2 \\ f(x,y) &= 7x^2 - 7y^2 \\ f(x,y) &= \ln\sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}$$

señale el número de ellas que verifica

$$D_{11}f(x,y) + D_{22}f(x,y) = 0$$

para todo (x,y) en el dominio de la función f.

(a) 1 $\quad$ (b) 2 $\quad$ (c) 3 $\quad$ (d) Ninguna de las anteriores

2. Señale el valor del límite $L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{6x^4y}{2x^5+y^5}$

(a) 0 $\quad$ (b) No existe L $\quad$ (c) $\dfrac{1}{2}$ $\quad$ (d) Ninguna de las anteriores

3. Calcule el siguiente límite

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x+1)}$$

(ln- logaritmo neperiano).

(a) $L = 1$ $\quad$ (b) $L = 0$ $\quad$ (c) $L = \infty$ $\quad$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Sea la función $f(x,y) = e^{(x-1)^2}\cos y$ y sea P_2 el polinomio de Taylor de order 2 de la función f en el punto $(x,y) = (1,0)$. Señale la respuesta correcta.

(a) $P_2(1,1) = \dfrac{3}{2}$ $\quad$ (b) $P_2(1,1) = 1$ $\quad$ (c) $P_2(1,1) = \dfrac{1}{2}$ $\quad$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Sea la función $f(x,y) = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 + y + 4$. Señale la respuesta correcta.

(a) $\left(\dfrac{-1}{4}, \dfrac{-1}{4}\right)$ es un punto crítico pero no un extremo relativo

(b) $\left(\dfrac{-1}{4}, \dfrac{-1}{4}\right)$ es un máximo local

(c) $\left(\dfrac{-1}{4}, \dfrac{-1}{4}\right)$ es un mínimo local

(d) Ninguna de las anteriores

6. Señale el valor de la integral $I = \int_1^2 \dfrac{\ln x}{x} dx$

(a) $\dfrac{\ln 2}{2}$ $\quad$ (b) $(\ln 2)^2$ $\quad$ (c) $\dfrac{(\ln 2)^2}{2}$ $\quad$ (d) Ninguna de las anteriores

7. Señale el valor de la integral

$$I = \int_1^2 \frac{4x^2 - 6x + 2}{x^2(x-1)(x+3)} dx$$

(a) $\frac{14}{3}\ln 2 - \frac{14}{9}\ln 5 - \frac{1}{3}$
(b) $\frac{9}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}\ln 5 - \frac{2}{3}$
(c) $\frac{5}{3}\ln 2 - \frac{1}{9}\ln 5 - \frac{1}{3}$
(d) Ninguna de las anteriores

8. Señale un punto de inflexión de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}.$$

(a) La función f no tiene puntos de inflexión
(b) $x_0 = 0$ (c) $x_0 = -1$ (d) Ninguna de las anteriores

9. Exprese el conjunto

$$S = \{(x, y) : x^2 + y^2 + 6y = 0\}$$

en coordenadas polares (ρ, θ).
(a) $S = \{(\rho, \theta) : \rho = \theta^2\}$
(b) $S = \{(\rho, \theta) : \rho = -6 \operatorname{sen} \theta\}$
(c) $S = \{(\rho, \theta) : \rho = 7 \cos \theta\}$
(d) Ninguna de las anteriores

10. Dado el polinomio

$$p(x) = -x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 4x - 1$$

sabemos que

$$p(x) = 1 + (x-1) + a(x-1)^2 + b(x-1)^3 - c(x-1)^4$$

en donde a, b, $c \in \mathbb{R}$ unos parámetros determinados. Señale la respuesta correcta.
(a) $a = -1$, $b = -1$, $c = 1$ (b) $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$
(c) $a = -1$, $b = 1$, $c = 1$ (d) Ninguna de las anteriores

1. **Solución. (b)**

   Comprobamos cada caso calculando directamente las derivadas:

   - Caso $f(x,y) = x^3 + 3xy^2$.

   $$\begin{array}{l} D_1 f(x,y) = 3x^2 + 3y^2,\ D_{11} f(x,y) = 6x, \\ D_2 f(x,y) = 6xy,\ D_{22} f(x,y) = 6x. \end{array}$$

   Y en este caso no verifica la ecuación

   $$D_{11} f(x,y) + D_{22} f(x,y) = 6x + 6x = 12x.$$

   - Caso $f(x,y) = 7x^2 - 7y^2$.

   $$\begin{array}{l} D_1 f(x,y) = 14x,\ D_{11} f(x,y) = 14 \\ D_2 f(x,y) = -14y,\ D_{22} f(x,y) = -14 \end{array}$$

   En este caso se verifica

   $$D_{11} f(x,y) + D_{22} f(x,y) = 14 - 14 = 0.$$

   - Caso $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$.

   $$\begin{array}{l} D_1 f(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2},\ D_{11} f(x,y) = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ D_2 f(x,y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2},\ D_{22} f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{array}$$

   En este caso también se verifica

   $$D_{11} f(x,y) + D_{22} f(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

2. **Solución. (b)**

   Denotemos $f(x,y) = \dfrac{6x^4 y}{2x^5 + y^5}$. El límite no existe ya que podemos tomar dos sucesiones distintas $(x_n) \to (0,0)$ tal que las correspondientes sucesiones de imágenes $f(x_n)$ tienden a diferente límite. Por ejemplo:

   - Tomando $(x_n) = \left(\dfrac{1}{n}, 0\right) \to (0,0)$ se tiene $(x_n) \to (0,0)$ para $n \to \infty$ y

   $$\lim_{(x_n)\to(0,0)} f(x_n) = \lim_{\left(\frac{1}{n},0\right)\to(0,0)} \frac{6\left(\frac{1}{n}\right)^4 \cdot 0}{2\left(\frac{1}{n}\right)^5 + 0^5} = 0.$$

   - Tomando $(x_n) = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) \to (0,0)$ se tiene también $(x_n) \to (0,0)$ para $n \to \infty$ y en este caso

   $$\lim_{(x_n)\to(0,0)} f(x_n) = \lim_{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\to(0,0)} \frac{6\left(\frac{1}{n}\right)^4 \frac{1}{n}}{2\left(\frac{1}{n}\right)^5 + \frac{1}{n}^5} = 2.$$

3. **Solución. (c)**

Calculamos el límite aplicando la regla de L'Hopital

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x+1)} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}'}{\ln(x+1)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x+1}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{x+1}{2\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}\sqrt{x} + \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 + \infty \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

4. **Solución. (c)**

Calculamos en primer lugar las derivadas de f en el punto $(1,0)$

$$\begin{aligned}
&f(1,0) = e^{(1-1)^2}\cos 0 = 1, \\
&D_1 f(1,0) = 2(x-1)e^{(x-1)^2}\cos y\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 2(1-1)e^{(1-1)^2}\cos 0 = 0, \\
&D_2 f(1,0) = -e^{(x-1)^2}\operatorname{sen} y\Big|_{(x,y)=(1,0)} = -e^{(1-1)^2}\operatorname{sen} 0 = 0, \\
&D_{11} f(1,0) = 2e^{(x-1)^2}\cos y + 4(x-1)^2 e^{(x-1)^2}\cos y\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 2, \\
&D_{12} f(1,0) = -2(x-1)e^{(x-1)^2}\operatorname{sen} y\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0, \\
&D_{22} f(1,0) = -e^{(x-1)^2}\cos y\Big|_{(x,y)=(1,0)} = -1.
\end{aligned}$$

Por tanto el polinomio de Taylor viene dado por

$$\begin{aligned}
P_2(x,y) &= f(1,0) + D_1 f(1,0)(x-1) + D_2 f(1,0) y \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(D_{11} f(1,0)(x-1)^2 + 2D_{12} f(1,0)(x-1)y + D_{22} f(1,0) y^2\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2}\left(2(x-1)^2 - y^2\right).
\end{aligned}$$

Luego finalmente

$$P_2(1,1) = 1 + \frac{1}{2}\left(2(1-1)^2 - 1^2\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

5. **Solución. (c)** Calculamos en primer lugar los puntos críticos de

$$f(x,y) = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 + y + 4.$$

Para ello resolvemos el sistema lineal que se obtiene de igualar las derivadas primeras a cero

$$\left.\begin{aligned} D_1 f(x,y) = 6x + 2y + 2 = 0 \\ D_2 f(x,y) = 2x + 2y + 1 = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (x,y) = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right).$$

Luego $(x,y) = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ es el único punto crítico de la función. Estudiamos ahora si la matriz Hessiana es definida positiva o negativa para determinar si el punto es un máximo o mínimo. De este modo

$$Hf\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} D_{11} f(x,y) = 6 & D_{12} f(x,y) = 2 \\ D_{21} f(x,y) = 2 & D_{11} f(x,y) = 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Como los determinantes de las submatrices principales son positivos

$$\Delta_1 = 6 > 0,$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0,$$

entonces la matriz Hessiana $Hf\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ es definida positiva y por tanto $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ es un mínimo local.

6. **Solución. (c)**

Como $\left(\ln^2 x\right)' = 2\ln x\,(\ln x)' = 2\ln x \frac{1}{x}$, la integral se puede resolver directamente aplicando la regla de Barrow

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx &= \int_1^2 \left(\frac{\ln^2 x}{2}\right)' dx = \left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_{x=1}^{x=2} = \frac{\ln^2 2 - \ln^2 1}{2} \\ &= \frac{\ln^2 2 - \ln^2 1}{2} = \frac{\ln^2 2}{2} \end{aligned}$$

7. **Solución. (a)**

En primer lugar $4x^2 - 6x + 2 = 0$ tiene como raíces $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$ y el polinomio del numerador se puede descomponer como

$$4x^2 - 6x + 2 = 4(x-1)(x-\frac{1}{2})$$

Luego podemos simplificar el integrando de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{4x^2 - 6x + 2}{x^2(x-1)(x+3)} &= \frac{4(x-1)(x-\frac{1}{2})}{x^2(x-1)(x+3)} = \frac{4x-2}{x^2(x+3)} \\ &= \frac{4}{x(x+3)} - \frac{2}{x^2(x+3)} \end{aligned}$$

Y por tanto

$$I = \int_1^2 \frac{4dx}{x(x+3)} - \int_1^2 \frac{2dx}{x^2(x+3)}.$$

Cada integral se resuelve de la manera habitual descomponiendo en fracciones simples. En el caso de la primera integral tenemos

$$\frac{4}{x(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3}$$

en donde A, B parámetros reales a determinar. Operando

$$\begin{aligned} \frac{4}{x(x+3)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} \Leftrightarrow \frac{4}{x(x+3)} = \frac{A(x+3)+Bx}{x(x+3)} \\ &\Leftrightarrow \frac{4}{x(x+3)} = \frac{(A+B)x + 3A}{x(x+3)} \\ &\Leftrightarrow A + B = 0,\ 3A = 4 \\ &\Leftrightarrow A = \frac{4}{3},\ B = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Y por tanto

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{4dx}{(x-1)(x+3)} &= \frac{4}{3}\int_1^2 \frac{dx}{x} - \frac{4}{3}\int_1^2 \frac{dx}{x+3} = \\
&= \frac{4}{3}\left[\ln x\right]_{x=1}^{x=2} - \frac{4}{3}\left[\ln(x+3)\right]_{x=1}^{x=2} \\
&= \frac{4}{3}\ln 2 - \frac{4}{3}\ln 5 + \frac{4}{3}\ln 4 \\
&= \frac{4}{3}\ln 2 - \frac{4}{3}\ln 5 + \frac{8}{3}\ln 2 \\
&= 4\ln 2 - \frac{4}{3}\ln 5
\end{aligned}$$

Del mismo modo

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x^2(x+3)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+3} \Leftrightarrow \frac{2}{x^2(x+3)} = \frac{(A+C)x^2 + (3A+B)x + 3B}{x^2(x+3)} \\
&\Leftrightarrow A + C = 0,\ 3A + B = 0,\ 3B = 2 \\
&\Leftrightarrow A = \frac{-2}{9},\ B = \frac{2}{3},\ C = \frac{2}{9}.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{2dx}{x^2(x+3)} &= \frac{-2}{9}\int_1^2 \frac{dx}{x} + \frac{2}{3}\int_1^2 \frac{dx}{x^2} + \frac{2}{9}\int_1^2 \frac{dx}{x+3} \\
&= \frac{-2}{9}\left[\ln x\right]_{x=1}^{x=2} + \frac{2}{3}\left[-x^{-1}\right]_{x=1}^{x=2} + \frac{2}{9}\left[\ln(x+3)\right]_{x=1}^{x=2} \\
&= \frac{-2}{9}\ln 2 + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2} + 1\right) + \frac{2}{9}(\ln 5 - \ln 4) \\
&= \frac{-2}{9}\ln 2 + \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\ln 5 - \frac{4}{9}\ln 2 \\
&= \frac{-2}{3}\ln 2 + \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\ln 5.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
I &= 4\ln 2 - \frac{4}{3}\ln 5 - \left(\frac{-2}{3}\ln 2 + \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\ln 5\right) \\
&= \frac{14}{3}\ln 2 - \frac{14}{9}\ln 5 - \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

8. **Solución. (b)** En primer lugar la derivada primera y segunda vienen dadas por

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}, \\
f''(x) &= \frac{6x}{(x-1)^4}.
\end{aligned}$$

Los puntos de inflexión vienen determinados por aquellos puntos para los qué la derivada segunda cambia de signo. En este caso la función

$$f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4}.$$

por tener denominador positivo solamente cambia de signo en el punto $x_0 = 0$ que coincide con el único punto de inflexión de la función.

9. **Solución. (b)**

Consideramos el cambio a polares $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho sen\theta$, sustituyendo directamente el cambio en la ecuación que define al conjunto

$$\begin{aligned}
&x^2 + y^2 + 6y = 0 \Leftrightarrow \rho^2\cos^2\theta + \rho^2\operatorname{sen}^2\theta + 6\rho\operatorname{sen}\theta = 0\\
&\Leftrightarrow \rho^2\left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right) + 6\rho\operatorname{sen}\theta = 0\\
&\Leftrightarrow \rho^2 + 6\rho\operatorname{sen}\theta = 0\\
&\Leftrightarrow \rho + 6\operatorname{sen}\theta = 0\\
&\Leftrightarrow \rho = -6\operatorname{sen}\theta.
\end{aligned}$$

Luego

$$S = \{(\rho,\theta) : \rho = -6\operatorname{sen}\theta\}$$

10. **Solución. (a)**

Al ser p un polinomio de grado 4 coincide con cualquier polinomio de Taylor de orden 4 de la misma función independientemente del punto en que esté centrado. En particular en el punto $x = 1$

$$p(x) = p(1) + p'(1)(x-1) + \frac{p''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{p'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{p^{(4}(1)}{4!}(x-1)^4$$

Luego identificando

$$\begin{aligned}
a &= \frac{p''(1)}{2!} = \frac{\left[-12x^2 + 18x - 8\right]_{x=1}}{2} = -1\\
b &= \frac{p'''(1)}{3!} = \frac{[18 - 24x]_{x=1}}{6} = -1\\
c &= -\frac{p^{(4}(1)}{4!} = -\frac{-24}{4!} = 1
\end{aligned}$$

Fundamentos de Matematicas.

Prueba de Evaluación a Distancia. Curso 2015-16

- Se debe marcar una sola respuesta correcta. Cada pregunta acertada suma 1 punto, las incorrectas restan 0.3. Las preguntas en blanco no puntúan.
- Las preguntas deben ser contestadas en el cuestionario virtual al que se accede a través del link "*CURSO 2015-16. Cuestionario: Prueba de evaluación a distancia online (disponible a partir del día 8 de enero de 2016)* ".
- Recuerde que dentro del examen virtual las respuestas deben ser marcadas en la pestaña correspondiente.
- El cuestionario virtual estara disponible los días 8, 9, 10, y 11 de enero.

1. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Sobre dicho conjunto consideramos la operación $\Diamond$ definida por

$$\begin{array}{rcl} \Diamond : \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (r,q) & \longmapsto & r\Diamond q = |r|\, q \end{array}$$

en donde $|\cdot|$ denota el valor absoluto. Dadas las siguientes propiedades:

- $\Diamond$ es asociativa.
- $\Diamond$ es conmutativa.
- Existe elemento neutro.

señale el número de ellas que son ciertas:

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) Ninguna de las anteriores

2. En el espacio de matrices $\mathbb{M}_2$ de orden 2 consideramos la base

$$\mathbf{A} = \left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

Hallar el vector de coordenadas de la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

con respecto de las base $\mathbf{A}$.

(a) $(1,0,1,2)$ (b) $(1,0,2,1)$ (c) $(0,-1,1,2)$ (d) Ninguna de las anteriores

3. Sea $\mathbb{P}_2$ el espacio de polinomios de grado igual o menor a 2

$$\mathbb{P}_2 = \{\mathbf{p}(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 : a_i \in \mathbb{R}\ \}$$

y sea $F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}$ la aplicación lineal que a cada polinomio $\mathbf{p}$ le hace corresponde su valor en el punto $x = 1$, es decir,

$$F(\mathbf{p}) = \mathbf{p}(1).$$

Consideramos las siguientes bases

$$\begin{aligned} \mathbf{A} =& \{\mathbf{p}_0(x) = x^2, \mathbf{p}_1(x) = x-2,\ \mathbf{p}_2(x) = -1\}, \\ \mathbf{B} =& \{2\}. \end{aligned}$$

en $\mathbb{P}_2$ y $\mathbb{R}$ respectivamente. Señale la matriz asociada a la aplicación con respecto de las bases $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.

(a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Considerando la misma situación del ejercicio anterior, determine una base de Ker$F$ expresadas en coordenadas con respecto de la base $\mathbf{A}$.
(a) $\{(1,1,0),(1,0,1)\}$
(b) $\{(1,0,0),(1,1,0)\}$
(c) $\{(1,-1,0),(1,0,-1)\}$
(d) Ninguna de las anteriores

5. Sea la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ definida por

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+x_2,x_1+x_2,x_3+x_4,x_3+x_4)$$

respecto de la base canónica. Señale, si existe, una base $\mathbf{B}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que su matriz asociada es diagonal.
(a) $\mathbf{B}=\{(1,1,1,0),(0,1,1,1),(1,0,0,0),(0,0,0,1)\}$
(b) La matriz no es diagonalizable y por tanto no existe dicha base
(c) $\mathbf{B}=\{(1,-1,0,0),(0,0,1,-1),(1,1,0,0),(0,0,1,1)\}$
(d) Ninguna de las anteriores

6. Sea la función $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$. Encuentre la ecuación de una recta tangente a f que pase por el punto $(0,4)$.
(a) $y=4-x$
(b) $y=4-3x$
(c) $y=4-2x$
(d) Ninguna de las anteriores

7. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua que verifica $\int_0^2 f(x)dx=5$. Señale el valor de la integral $I=\int_0^1 f(2y)dy$.
(a) $\dfrac{5}{2}$
(b) 10
(c) $\dfrac{2}{5}$
(d) Ninguna de las anteriores

8. Calcúlese el valor de la integral $\int_M y\,dxdy$, en donde M es el triángulo de vértices $(0,0),(0,1),(1,1)$.
(a) $\dfrac{1}{2}$
(b) $\dfrac{1}{4}$
(c) $\dfrac{1}{3}$
(d) Ninguna de las anteriores

9. Sea la función $f(x,y)=x^3\operatorname{sen} y$. Determine su polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(1,0)$.
(a) 0
(b) $y+3(x-1)y$
(c) $x-xy+y^2$
(d) Ninguna de las anteriores

10. Determinar el número total de puntos críticos de la función

$$f(x,y,z)=(x^2+2y^2+3z^2)e^{-(x^2+y^2+z^2)}.$$

(a) 5
(b) 0
(c) 7
(d) Ninguna de las anteriores

FMI. SOLUCIONES PED Enero2016

1. **Solución. (a)**

- $\Diamond$ es asociativa . Para r, q, $t \in \mathbb{R}$ cualesquiera se tiene

$$\begin{gathered}(r\Diamond q)\Diamond t = (|r|\, q)\, \Diamond t = ||r|\, q|\, t = |r|\, |q|\, t \\ = \\ r\Diamond\, (q\Diamond t) = r\Diamond(|q|\, t) = |r|\, |q|\, t.\end{gathered}$$

- $\Diamond$ no es conmutativa. Aplicando propiedades del valor absoluto, si tomamos $r = 1$, $q = -1$, se tiene

$$\begin{aligned}&r\Diamond q = 1\Diamond(-1) = |1|\,(-1) = -1 \\ &\neq \\ &q\Diamond r = (-1)\Diamond 1 = |-1|\, 1 = 1\end{aligned}$$

- No existe elemento neutro, si existiese un elemento neutro $e \in \mathbb{R}$ se tendría que verificar $r\Diamond e = e\Diamond r = r$. En particular para $r = 1$ eso significa que

$$1\Diamond e = 1 \Leftrightarrow |1|\, e = 1 \Leftrightarrow e = 1.$$

  Pero $e = 1$ no es elemento neutro, ya que si tomamos por ejemplo $r = -1$,

$$-1\Diamond 1 = |-1|\, 1 = 1 \neq -1.$$

2. **Solución. (c)** Respecto de la base canónica

$$\mathbf{E} = \left\{\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\},$$

el vector de coordenadas de B es directamente $(1, 0, 1, 2)$. La matriz de cambio de la base $\mathbf{A}$ a la base $\mathbf{E}$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En el orden contrario, la matriz de cambio de $\mathbf{E}$ a $\mathbf{A}$ es la inversa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

son sus coordenadas respecto de la base $\mathbf{A}$. Efectivamente se verifica

$$0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. **Solución.** **(b)** Dado un polinomio genérico $\mathbf{p}(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ tenemos que

$$\mathbf{p}(1) = a_2 + a_1 + a_0 = \left(\frac{a_2 + a_1 + a_0}{2}\right) \cdot 2$$

en donde $\dfrac{a_2 + a_1 + a_0}{2}$ es la coordenada del escalar $a_2 + a_1 + a_0$ con respecto de la base $\mathbf{B} = \{2\}$ si vemos el conjunto de los números reales como un espacio vectorial sobre si mismo. Luego

$$F(\mathbf{p}) = \frac{a_2 + a_1 + a_0}{2},$$

matricialmente

$$F(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Ahora tenemos que expresar la aplicación lineal F en función de las coordenadas de la base $\mathbf{A}$. En este sentido, si denotamos por (a_2', a_1', a_0') el vector de coordenadas de $\mathbf{p}$ con respecto de $\mathbf{A}$ =$\{\mathbf{p}_0(x) = x^2, \mathbf{p}_1(x) = x - 2,\ \mathbf{p}_2(x) = -1\}$, tenemos la siguiente relación

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2'x^2 + a_1'(x-2) + a_0'(-1) \Leftrightarrow a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2'x^2 + a_1'x - (a_0' + 2a_1'),$$

Igualando término a término determinamos la relación entre las coordenadas (a_2, a_1, a_0) y (a_2', a_1', a_0')

$$a_2 = a_2',\ a_1 = a_1',\ a_0 = -(a_0' + 2a_1'),$$

matricialmente

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2' \\ a_1' \\ a_0' \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en (1)

$$\begin{aligned} F(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2' \\ a_1' \\ a_0' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2' \\ a_1' \\ a_0' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Y por tanto

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

es la matriz asociada a F con respecto de las bases $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.

4. **Solución.** **(a)** A partir de lo hecho en el ejercicio anterior podemos determinar directamente la ecuación implícita de Ker$F$ en función de las coordenadas de la base $\mathbf{A}$.

$$\left(\tfrac{1}{2} \ \ -\tfrac{1}{2} \ \ -\tfrac{1}{2} \right) \begin{pmatrix} a_2' \\ a_1' \\ a_0' \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}a_2' - \frac{1}{2}a_1' - \frac{1}{2}a_0' = 0 \Leftrightarrow a_2' - a_1' - a_0' = 0$$

Luego

$$\operatorname{Ker} F = \{(a_2', a_1', a_0') : a_2' - a_1' - a_0' = 0\}$$

y por tanto un vector genérico $(a_2', a_1', a_0') \in \operatorname{Ker} F$ verifica

$$(a_2', a_1', a_0') = (a_1' + a_0', a_1', a_0') = a_1'(1,1,0) + a_0'(1,0,1).$$

De donde deducimos directamente que $\{(1,1,0),(1,0,1)\}$ es un sistema generador linealmente independiente, y por tanto base de $\operatorname{Ker} F$.

5. **Solución. (c)**

La matriz asociada viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 (\lambda - 2)^2$$

tiene como raíces $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, ambas con multiplicidad doble. Las ecuaciones del subespacio $\mathbb{E}_1$ asociado al autovalor $\lambda_1 = 0$ vienen dadas por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$x_1 + x_2 = 0,\ x_3 + x_4 = 0.$$

Luego

$$\mathbb{E}_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 = 0,\ x_3 + x_4 = 0\} = G[(1,-1,0,0),(0,0,1,-1)]$$

está generado por dos vectores linealmente independientes y es por tanto de dimensión 2. Coincide por tanto la dimensión del subespacio con la multiplicidad de autovalor.

Por otro lado, las ecuaciones del subespacio $\mathbb{E}_2$ asociado al autovalor $\lambda_1 = 2$ vienen dadas por

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$x_2 - x_1 = 0,\ x_3 - x_4 = 0.$$

De la misma manera

$$\mathbb{E}_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_2 - x_1 = 0,\ x_3 - x_4 = 0\} = G[(1,1,0,0),(0,0,1,1)]$$

está generado por dos vectores linealmente independientes y también de dimensión 2. Luego coinciden la multiplicidad de los autovalores con la dimensión de sus subespacios asociados. Luego aplicando el Teorema de caracterización (p. 99 libro de texto) la matriz es diagonalizable. La base sería

$$\mathbf{B} = \{(1,-1,0,0),(0,0,1,-1),(1,1,0,0),(0,0,1,1)\}$$

De hecho, se puede comprobar que dada dicha base y calculandos las correspondientes matrices de paso la forma diagonal asociada viene dada por

$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6. **Solución. (b)** Sin perdida de generalidad suponemos que la recta tangente no es vertical a priori, luego en principio la expresamos como una función

$$y = ax + b.$$

La derivada de f viene dada por

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Por tanto para que y sea tangente en un determinado punto de tangencia x_0 deben coincidir los valores en dicho punto

$$y(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow ax_0 + b = x_0 + \frac{1}{x_0} \tag{2}$$

y sus respectivas pendientes

$$y'(x_0) = f'(x_0) \Leftrightarrow a = 1 - \frac{1}{x_0^2} \tag{3}$$

Y además se pide que pase por el punto $(0, 4)$, es decir

$$y(0) = 4 \Leftrightarrow b = 4. \tag{4}$$

Combinando estas tres condiciones podemos determinar el punto de tangencia

$$\left(1 - \frac{1}{x_0^2}\right) x_0 + 4 = x_0 + \frac{1}{x_0} \Leftrightarrow \frac{2}{x_0} = 4 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}.$$

De (3)

$$a = 1 - \frac{1}{\frac{1}{2^2}} = -3$$

y por tanto la recta tangente pedida viene dada por $y = -3x + 4$.

7. **Solución.** **(a)** Si consideramos el cambio $x = g(y) = 2y$, $\dfrac{dx}{dy} = g'(y) = 2$, $2 = g(1)$, $0 = g(0)$, basta aplicar el teorema de cambio de variable

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(2y)2dy \Rightarrow I = \int_0^1 f(2y)dy = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx = \frac{5}{2}$$

8. **Solución.** **(c)** Como

$$M = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 1\}.$$

Aplicando el teorema de integración reiterada

$$\int_M ydxdy = \int_0^1 dx \int_x^1 ydy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

9. **Solución.** **(b)** El polinomio de Taylor de segundo orden en $(1,0)$ viene dado por la fórmula

$$P_2(x,y) = f(0,0) + (x-1)D_1f(0,0) + yD_2f(0,0) + \frac{1}{2}\left((x-1)^2D_{11}f(0,0) + 2(x-1)yD_{12}f(0,0) + y^2D_{22}f(0,0)\right)$$

Como $f(1,0) = 0$, $D_1f(0,0) = 3x^2 \operatorname{sen} y\big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$, $D_2f(0,0) = x^3 \cos y\big|_{(x,y)=(1,0)} = 1$,
$D_{11}f(0,0) = 6x \operatorname{sen} y|_{(x,y)=(1,0)} = 0$,
$D_{12}f(0,0) = 3x^2 \cos y\big|_{(x,y)=(1,0)} = 3$,
$D_{22}f(0,0) = -x^3 \operatorname{sen} y\big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$,
se tiene que

$$P_2(x,y) = y + \frac{1}{2}(2(x-1)y3) = y + 3(x-1)y.$$

10. **Solución.** **(c)** Para simplificar la notación, denotamos

$$p \equiv p(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2,\ g \equiv g(x,y,z) = -(x^2 + y^2 + z^2)$$

En general se tiene que las derivadas parciales vienen dadas por

$$D_if = (D_ip + pD_ig)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$$

para $i \in \{1,2,3\}$. En concreto, cada derivada parcial viene dada por

$$\begin{aligned} D_1f(x,y,z) &= x(1 - \big(x^2 + 2y^2 + 3z^2\big))e^{-(x^2+y^2+z^2)}, \\ D_2f(x,y,z) &= 2y(2 - \big(x^2 + 2y^2 + 3z^2\big))e^{-(x^2+y^2+z^2)}, \\ D_3f(x,y,z) &= 3z(3 - \big(x^2 + 2y^2 + 3z^2\big))e^{-(x^2+y^2+z^2)}. \end{aligned}$$

Los puntos críticos se obtienen resolviendo el sistema no lineal dado por igualar las anteriores tres ecuaciones a cero. En este caso, como el termino $e^{-(x^2+y^2+z^2)} > 0$ es estrictamente positivo, esto equivalente a resolver el siguiente sistema no lineal

$$\begin{aligned} x(1 - \big(x^2 + 2y^2 + 3z^2\big)) &= 0, \\ 2y(2 - \big(x^2 + 2y^2 + 3z^2\big)) &= 0, \\ 3z(3 - \big(x^2 + 2y^2 + 3z^2\big)) &= 0. \end{aligned}$$

En general, si consideramos la primera ecuación, para que

$$x(1 - \left(x^2 + 2y^2 + 3z^2\right)) = 0$$

solamente podemos considerar dos posibilidades $x = 0$ o $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$. Para la segunda ecuación que $y = 0$ o $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 2$, mientras que para la tercera $y = 0$ o $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 3$. En los tres casos la segunda posibilidad de cada excluye las segundas posibilidades de las otras dos. Por ejemplo si $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$, entonces necesariamente de la segunda y tercera ecuación $y = z = 0$ y por tanto $x^2 = 1$, con lo que las únicas posibilidades serían $x_1 = (1, 0, 0)$, $x_2 = (-1, 0, 0)$. Razonando del mismo modo el resto de puntos críticos vienen dados por $x_3 = (0, 1, 0)$, $x_4 = (0, -1, 0)$, $x_5 = (0, 0, 1)$, $x_6 = (0, 0, -1)$, $x_7 = (0, 0, 0)$.