

TEMA 4: AUTOCORRELACIÓN

Wooldridge: Capítulo 12

Gujarati: Capítulo 14

-
- El análisis aplicado de muchos fenómenos económicos exige relajar el supuesto de No Autocorrelación que se hace en el modelo clásico de regresión.
 - El contexto “natural” de análisis de este fenómeno es el de series temporales.
 - Este fenómeno NO se presenta en el caso de sección cruzada en que los individuos son independientes entre sí.

- En datos económicos de series temporales (en los que el orden en que ocurren las observaciones es relevante) es bastante frecuente la presencia de autocorrelación.
 - Se suelen observar pautas de regularidad que pueden ser muestras de autocorrelación.
 - También la inercia de los datos económicos causa dependencia temporal.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue background with a white arrow pointing to the right, and a yellow and orange gradient bar at the bottom.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Supongamos que queremos analizar $Y_t = F(K_t, L_t)$ con datos trimestrales. Se produce una huelga de trabajadores que afecta a la producción del trimestre.

No autocorrelación: no hay motivo para pensar que la perturbación se trasladará al siguiente trimestre.

Autocorrelación: Afecta a la producción del siguiente/s trimestre.

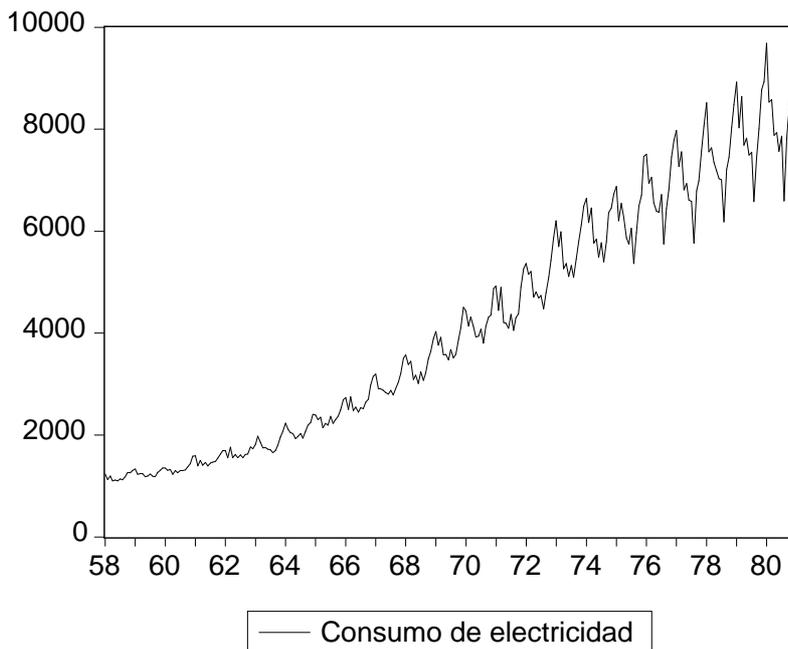
Ejemplos:



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



Modelo de Regresión Lineal con autocorrelación

- Por simplicidad consideraremos el caso del modelo de regresión simple donde solamente condicionamos a una variable.
- Utilizaremos como subíndice t , s o $t-j$ para resaltar que el análisis que vamos a hacer es especialmente relevante con datos de series temporales.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

- Dada una serie temporal con T observaciones podemos escribir el modelo como:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t \quad t = 1, \dots, T$$

donde:

1. $-E(\varepsilon_t | X) = 0$

Este supuesto se cumplía siempre con observaciones independientes (sección cruzada).

Implica que el término de error está incorrelacionado con la variable explicativa en cada uno de los períodos temporales.

Este supuesto necesitamos hacerlo para garantizar la insesgadez y consistencia del estimador.

2. - Suponemos también que se cumple el supuesto de homocedasticidad:

$$V(\varepsilon_t | X) = \sigma^2 \quad \forall t = 1, 2, \dots, T$$

3. - Pero en el modelo tenemos Autocorrelación o correlación serial:

$$C(Y_t, Y_{t-j} | X) = C(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-j} | X) = C(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-j} | X_t, X_{t-j}) = \sigma_{t,t-j} \quad (j \neq 0)$$

Este supuesto implica que la correlación entre dos perturbaciones puede ser distinta de

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

The logo for 'Cartagena99' features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a background of a blue and orange gradient with a subtle arrow shape pointing to the right.

Vamos a suponer que: $\sigma_{t,t-j} = \gamma_j$

lo que implica que la covarianza entre dos perturbaciones ocurridas en dos períodos distintos (t y $t-j$) sólo depende del tiempo j transcurrido entre ellos, no del momento del tiempo t considerado.

Por ejemplo, la covarianza condicional de las perturbaciones ocurridas en 1980 y 1985 será la misma que entre 1990 y 1995.

1. ORIGEN DE LA AUTOCORRELACIÓN

- **Por la naturaleza de los fenómenos analizados.**

La gran mayoría de las variables económicas presenta un comportamiento inercial (tendencias, ciclos, estacionalidad) lo que se traduce en la existencia de autocorrelación.

- **Por la agregación de los datos.**

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

2. PROPIEDADES DEL ESTIMADOR MCO

• ¿Qué propiedades tendrá el estimador de MCO en este contexto?

- El estimador es insesgado y consistente
- El estimador no es eficiente.

Veamos la expresión de la varianza:

$$\begin{aligned}
 V(\hat{\beta}|X) &= V\left(\sum_t c_t Y_t\right) = \sum_t c_t^2 V(Y_t|X) + 2\sum_j \sum_{t>j} c_t c_{t-j} C(Y_t, Y_{t-j}|X) = \\
 &=_{V(Y_t|X)=\sigma^2} \sigma^2 \sum_t c_t^2 + 2\sum_j \sum_{t>j} c_t c_{t-j} C(Y_t, Y_{t-j}|X) \stackrel{C(Y_t, Y_{t-j}|X)=\gamma_j}{=} \sigma^2 \frac{1}{\sum_t x_t^2} + 2\sum_j \gamma_j \sum_{t>j} c_t c_{t-j}
 \end{aligned}$$

Nótese que esta expresión no es la habitual → La construcción de intervalos de confianza y la contrastación de hipótesis que se realiza a partir de la expresión del caso de no

autocorrelación $V(\hat{\beta}|X_t) = \sigma_{\hat{\beta}}^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_t x_t^2} = \frac{\sigma^2}{TS_X^2}$ **no son válidas. La importancia del “sesgo”**

dependerá de la magnitud de la autocorrelación.

- **Todos estos resultados son fácilmente ampliables al contexto de regresión lineal múltiple.**



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

3. INFERENCIA ROBUSTA A LA HETEROCEDASTICIDAD Y AUTOCORRELACIÓN: PROPUESTA DE NEWEY-WEST

- En cualquier caso y a partir de resultados asintóticos, puede llevarse a cabo la construcción “aproximada” de intervalos de confianza y la contrastación de hipótesis, empleando la propuesta de estimación para la matriz de varianzas y covarianzas de Newey-West (1987).
- Se puede emplear la matriz de Newey-West para construir intervalos de confianza y realizar contrastes de hipótesis como se hace habitualmente.
- La filosofía empleada es equivalente a la del estimador de la varianza propuesto por White para el caso de heterocedasticidad.

Ejemplo

Función agregada de consumo española

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t$$

Y: log(Gasto agregado)

X: log(Renta agregada)

Datos Contabilidad nacional 1964-1995

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Dependent Variable: Y

Method: Least Squares

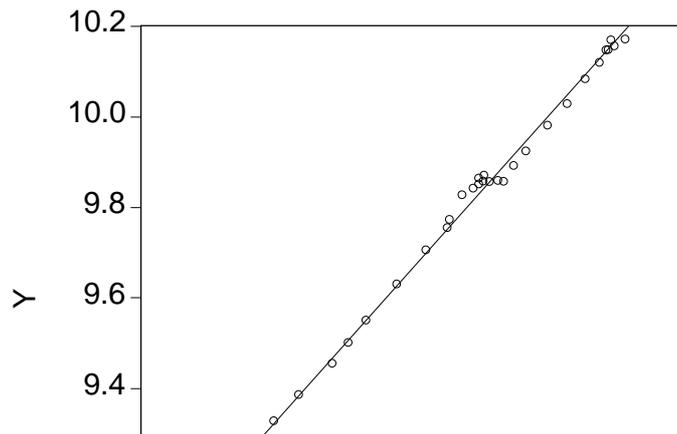
Sample: 1964 1995

Included observations: 32

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.089095	0.110773	-0.804309	0.4275
X	0.966450	0.010834	89.20459	0.0000
R-squared	0.996244	Mean dependent var		9.788000
Adjusted R-squared	0.996119	S.D. dependent var		0.297676
S.E. of regression	0.018545	Akaike info criterion		-5.076803
Sum squared resid	0.010317	Schwarz criterion		-4.985194
Log likelihood	83.22884	F-statistic		7957.459
Durbin-Watson stat	0.346022	Prob(F-statistic)		0.000000

INTERVALO NO ROBUSTO AUTOCORRELACIÓN

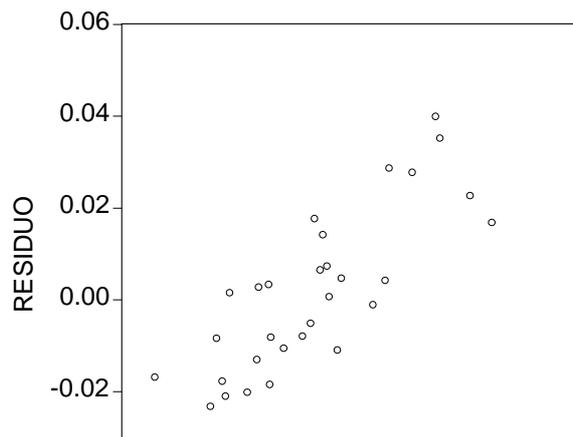
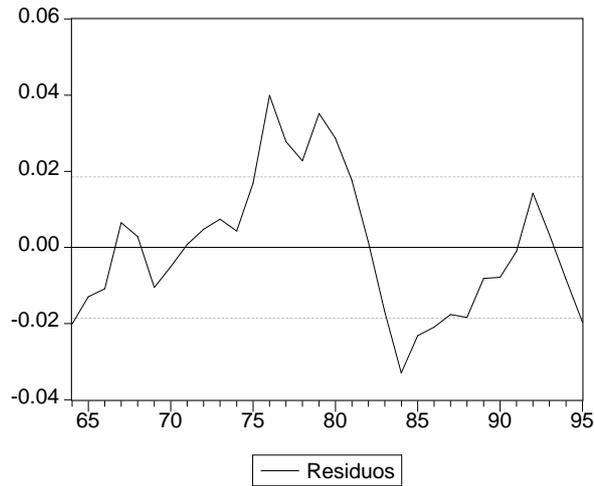
$$\hat{\beta} \pm 1,96 \times s(\hat{\beta}) \quad 0,966 \pm 1,96 \times 0,0108 \Rightarrow [0,944 ; 0,987]$$



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**





**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Dependent Variable: Y

Method: Least Squares

Sample: 1964 1995

Included observations: 32

Newey-West HAC Standard Errors & Covariance (lag truncation=3)

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.089095	0.106867	-0.833701	0.4110
X	0.966450	0.010595	91.21764	0.0000
R-squared	0.996244	Mean dependent var		9.788000
Adjusted R-squared	0.996119	S.D. dependent var		0.297676
S.E. of regression	0.018545	Akaike info criterion		-5.076803
Sum squared resid	0.010317	Schwarz criterion		-4.985194
Log likelihood	83.22884	F-statistic		7957.459
Durbin-Watson stat	0.346022	Prob(F-statistic)		0.000000

INTERVALO ROBUSTO

$$\hat{\beta} \pm 1,96 \times s(\hat{\beta}) \quad 0,966 \pm 1,96 \times 0,0106 \Rightarrow [0,945 ; 0,986]$$

4. PROCEDIMIENTOS DE DETECCIÓN

- **Importante:** En el contexto de regresión es mejor analizar la posible autocorrelación a partir de los residuos MCO.
- Los métodos gráficos ya ilustrados
- Contrastes formales



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

CONTRASTE DURBIN-WATSON

- A pesar de sus muchas limitaciones es muy popular.
- Consideremos el modelo:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \dots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$$

en el que deseamos contrastar si ε_t presenta estructura autorregresiva de orden uno o

AR(1), es decir:

$$\varepsilon_t = \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + u_t \quad |\varphi| < 1 \quad \text{donde } u_t \text{ es ruido blanco.}$$

H₀: No autocorrelación

H₁: AR(1)

Para efectuar el contraste haremos:

1º) Se estima por MCO el modelo $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \dots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$ y obtenemos $\hat{\varepsilon}$

2º) Se calcula:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^T (\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2} \approx 2(1-r)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Nótese que:

$d \approx 0 \rightarrow$ Autocorrelación +

$d \approx 2 \rightarrow$ NO Autocorrelación

$d \approx 4 \rightarrow$ Autocorrelación -

Presenta muchos problemas, entre otros:

1º) Sólo es válido en el marco de estructuras AR(1)

2º) El contraste tiene zonas de indeterminación.

Según el valor de n y de k y el nivel de significación, las tablas del Durbin-Watson nos proporcionan unos valores d_L (límite inferior) y d_U (límite superior) según los cuales:

0- d_L : Se rechaza la H_0 : existe autocorrelación de primer orden positiva.

d_L - d_U : Indeterminación.

d_U -2- $(4-d_U)$: No se rechaza H_0 : no existe autocorrelación de primer orden.

$(4-d_U)$ - $(4-d_L)$: Indeterminación.

The logo for 'Cartagena99' features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

CONTRASTE DE BREUSCH GODFREY

- **Consideremos el modelo:**
$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \dots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$$

en el que deseamos contrastar si ε_t presenta autocorrelación de orden “p”. Por ejemplo, AR(p):
$$\varepsilon_t = \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \varphi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \varphi_p \varepsilon_{t-p} + u_t$$
 donde u_t es ruido blanco.

H₀: No autocorrelación

H₁: Autocorrelación de orden “p”: AR(p) ó MA(p)

$$\varepsilon_t = \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \varphi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \varphi_p \varepsilon_{t-p} + u_t \quad \text{AR(p)}$$

$$u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2} - \dots - \theta_p u_{t-p} = a_t \quad \text{MA(p)}$$

1º) Se estima por MCO el modelo
$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \dots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$$
 y obtenemos $\hat{\varepsilon}$

2º) Se estima por MCO el modelo:

$$\hat{\varepsilon}_t = \delta_1 \hat{\varepsilon}_{t-1} + \delta_2 \hat{\varepsilon}_{t-2} + \dots + \delta_p \hat{\varepsilon}_{t-p} + \gamma_0 + \gamma_1 X_{1t} + \dots + \gamma_k X_{kt} + w_t$$
 y se obtiene el coeficiente

de determinación $R^2_{\hat{\varepsilon}}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

EJEMPLO

Función agregada de consumo española

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$$

Y: log(Gasto agregado)

X: log(Renta agregada)

Datos Contabilidad nacional 1964-1995

Dependent Variable: Y

Method: Least Squares

Sample: 1964 1995

Included observations: 32

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.089095	0.110773	-0.804309	0.4275
X	0.966450	0.010834	89.20459	0.0000
R-squared	0.996244	Mean dependent var		9.788000
Adjusted R-squared	0.996119	S.D. dependent var		0.297676
S.E. of regression	0.018545	Akaike info criterion		5.076803

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:

F-statistic	53.21564	Probability	0.000000
Obs*R-squared	20.71261	Probability	0.000005

Test Equation:

Dependent Variable: RESID

Method: Least Squares

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.010107	0.066928	0.151017	0.8810
X	-0.001038	0.006546	-0.158613	0.8751
RESID(-1)	0.820714	0.112505	7.294905	0.0000
R-squared	0.647269	Mean dependent var		-2.22E-15
Adjusted R-squared	0.622943	S.D. dependent var		0.018243
S.E. of regression	0.011202	Akaike info criterion		-6.056352
Sum squared resid	0.003639	Schwarz criterion		-5.918940
Log likelihood	99.90164	F-statistic		26.60782
Durbin-Watson stat	1.390554	Prob(F-statistic)		0.000000

Se rechaza H₀: No autocorrelación orden uno

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:

F-statistic	29.26852	Probability	0.000000
Obs*R-squared	21.64605	Probability	0.000020

Test Equation:

Dependent Variable: RESID

Method: Least Squares

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.011371	0.065240	0.174299	0.8629
X	-0.001151	0.006381	-0.180372	0.8582
RESID(-1)	1.057451	0.185006	5.715754	0.0000
RESID(-2)	-0.295111	0.185744	-1.588803	0.1233
R-squared	0.676130	Mean dependent var		-2.22E-15

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



5. PROCEDIMIENTOS DE ESTIMACIÓN

A modo ilustrativo consideraremos un modelo con AR(1)

- Consideremos el modelo

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t$$

con

$$\varepsilon_t = \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + u_t \quad |\varphi| < 1$$

u_t “ruido blanco”

En este caso MCO no es el Estimador Lineal Insesgado de Mínima Varianza → Existe un estimador alternativo que es más eficiente (Mínimos Cuadrados Generalizados).

- Si φ es conocido → “Modelo cuasidiferenciado”

$$Y_t - \varphi Y_{t-1} = \alpha(1 - \varphi) + \beta(X_t - \varphi X_{t-1}) + \varepsilon_t - \varphi \varepsilon_{t-1}$$

Se estima por MCO

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cochrane-Orcutt

1º) Se estima por MCO el modelo $Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t$ Y OBTENEMOS $\hat{\varepsilon}$

2º) Se estima por MCO la regresión $\hat{\varepsilon}_t = \varphi \hat{\varepsilon}_{t-1} + u_t$ y se obtiene $\hat{\varphi}$

3º) Se estima por MCO el modelo $Y_t - \hat{\varphi} Y_{t-1} = \mu + \beta(X_t - \hat{\varphi} X_{t-1}) + u_t$

4º) Se obtienen unos nuevos residuos del modelo original a partir de las estimaciones del paso 3º y se vuelve al paso 2º

5º) El proceso se para cuando entre una y otra iteración los parámetros estimados varían muy poco.

Métodos no lineales

$$Y_t - \varphi Y_{t-1} = \alpha(1 - \varphi) + \beta(X_t - \varphi X_{t-1}) + \varepsilon_t - \varphi \varepsilon_{t-1}$$

↓

$$Y_t = \alpha(1 - \varphi) + \varphi Y_{t-1} + \beta(X_t - \varphi X_{t-1}) + \varepsilon_t - \varphi \varepsilon_{t-1}$$

↓

$$Y_t = \alpha(1 - \varphi) + \varphi Y_{t-1} + \beta X_t - \beta \varphi X_{t-1} + u_t$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Importante:

- a) Ambos procedimientos son fácilmente ampliables a procesos AR(p)
- b) Ambos procedimientos proporcionan estimaciones consistentes de los parámetros y asintóticamente más eficientes que MCO.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue background with a white arrow pointing to the right, and a white shadow effect is visible beneath the text.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70