GRUPOS ABELIANOS

¿Cuáles son los grupos abelianos de un orden n dado?

Tomemos, por ejemplo, $n = 1800 = 2^3\, 3^2\, 5^2$

Así, sin pensar mucho, podemos escribir los siguientes doce grupos (en azul)

POSIBLES PARTICIONES

3	2	2
3	2	2
2+1	1+1	1+1
1+1+1		

No. de grupos: $3 \times 2 \times 2 = 12$

$$\begin{aligned}
C_8 \times C_9 \times C_{25} &= C_{1800}, \\
C_8 \times C_3 \times C_3 \times C_{25} &= C_{600} \times C_3, \\
C_4 \times C_2 \times C_9 \times C_{25} &= C_{900} \times C_2, \\
C_4 \times C_2 \times C_3 \times C_3 \times C_{25} &= C_{300} \times C_6, \\
C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_9 \times C_{25} &= C_{450} \times C_2 \times C_2, \\
C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_3 \times C_3 \times C_{25} &= C_{150} \times C_6 \times C_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_8 \times C_9 \times C_5 \times C_5 &= C_{360} \times C_5, \\
C_8 \times C_3 \times C_3 \times C_5 \times C_5 &= C_{120} \times C_{15}, \\
C_4 \times C_2 \times C_9 \times C_5 \times C_5 &= C_{180} \times C_{10}, \\
C_4 \times C_2 \times C_3 \times C_3 \times C_5 \times C_5 &= C_{60} \times C_{30}, \\
C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_9 \times C_5 \times C_5 &= C_{90} \times C_{10} \times C_2, \\
\underbrace{C_2 \times C_2 \times C_2}_{2\text{-Sylow}} \times \underbrace{C_3 \times C_3}_{3\text{-Syl.}} \times \underbrace{C_5 \times C_5}_{5\text{-Syl}} &= C_{30} \times C_{30} \times C_2.
\end{aligned}$$

Aclaraciones:

1) C_k denota el grupo cíclico $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$

2) La expresión alternativa de cada grupo (en verde) es una consecuencia del isomorfismo, ya visto,

$$\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/k\ell\mathbb{Z} \quad \text{si } (k,\ell)=1. \quad (\text{T. Chino})$$

3) Los doce grupos anteriores son distintos (i.e. no isomorfos).

Por ejemplo, el primero tiene un elemento de orden 25 (e.g. (0,0,1)) y el segundo — contando de izquierda a derecha y de arriba a abajo — no.

Por su parte el segundo tiene elementos de orden 9 (e.g. (0, 1, 0, 0)) y el tercero no, etc.

Y, de hecho, no va a haber más grupos abelianos de orden 1800.

Este es el contenido del T. de clasificación de grupos abelianos, una versión del cual dice lo siguiente:

Theorem 5.38. *Let G be a finite abelian group and let*

$$|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

be the prime decomposition of G. Then

$$G \cong A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k \tag{43}$$

where each group A_i is the Sylow p_i-subgroup of G and has isomorphism class

$$C_{p_i^{\beta_{1,i}}} \times C_{p_i^{\beta_{2,i}}} \times \dots \times C_{p_i^{\beta_{t_i,i}}}$$

for natural numbers t_i and $\beta_{j,i}$ with

$$\beta_{1,i} \geq \beta_{2,i} \geq \dots \geq \beta_{t_i,i}. \tag{44}$$

This decomposition is unique: if $G \cong B_1 \times B_2 \times \dots \times B_k$ with $|B_i| = p^{\alpha_i}$ then for all i we have $B_i \cong A_i$ and B_i and A_i have the same sequence of invariant factors $\beta_{1,i}, \beta_{2,i}, \dots, \beta_{t_i,i}$.

(los enteros $p_i^{\beta_{ji}}$ se llaman, a veces, divisores elementales de G)

Demostración.

Hay que ver 3 cosas:

1) Unicidad de la descomposición, i.e. que grupos con β_i's distintos son no isomorfos.

Bueno, la idea de esto la hemos visto en el ejemplo y no vamos a hacer una demostración formal. (puede verse en las notas)

2) Todo grupo abeliano finito G es isomorfo al producto directo de sus grupos de Sylow.

Esto tampoco va a ser difícil. Va a ser una consecuencia del siguiente resultado visto anteriormente:

Corollary 5.14. *Let G be a group and let H and K be normal subgroups of G which satisfy both*

$$H \cap K = \{1\}$$

and

$$HK = G.$$

Then G is isomorphic to $H \times K$.

(O su generalización a n-subgrupos:

Theorem 5.12. *Let G be a group and let $H_1, \ldots, H_n$ be* **normal** *subgroups of G with the property that*

$$H_j \cap (H_1 \ldots H_{j-1} H_{j+1} \ldots H_n) = \{1\} \tag{33}$$

for each $1 \leq j \leq n$. Then

$$H_1 \ldots H_n \cong H_1 \times \ldots \times H_n. \tag{34}$$

)

Para empezar, la condición de normalidad se va a cumplir automáticamente (¡estamos en un grupo abeliano!)

Pero además si $|G| = p^r q^s$, digamos, y H y K son los correspondientes grupos de Sylow, entonces $H \cap K = \{1\}$ pues si $x \in H \cap K$ el orden del subgrupo $\langle x \rangle$ debe dividir por un lado a p^r y por otro a q^s (¡con p y q primos!) luego, necesariamente, $x = 1$.

$o(x) = |\langle x \rangle|$

$o(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1$

Además, está claro que $G = HK$ pues $|G| = p^r q^s = \underbrace{|H|}_{p^r}\underbrace{|K|}_{q^s} = \underbrace{|HK|}_{p^r q^s}$. → $H \cap K = 1$

Así que hemos visto que G es isomorfo al producto directo de sus grupos de Sylow y ya sólo nos queda ver la parte más difícil, que es la siguiente:

3) Todo p-subgrupo de Sylow de un grupo abeliano es isomorfo a un producto directo de grupos cíclicos.

Para probar este resultado seguiremos la demostración del libro de G. Navarro, la cual consiste de dos lemas.

Lema 1 Un p-grupo abeliano G no cíclico tiene más de un subgrupo de orden p. ($p=2$: e.g. C_4 solo tiene un subg. cíclico $\langle \bar{2} \rangle$; $C_2 \times C_2$: $\langle (1,0) \rangle, \langle (0,1) \rangle$)

Demostración. Supongamos que tiene solo uno. Tenemos que ver que entonces G es cíclico. (Razonaremos por inducción sobre $|G| = p^r$).

- Para $r=1$ esto es obvio: todo grupo de orden primo es cíclico.

Consideremos el homomorfismo:

$$f: G \longrightarrow G$$
$$x \longmapsto x^p$$

OJO: no tendría por qué ser homom. si G no fuese abel.

(en general $f(xy) = (xy)^p \neq x^p \cdot y^p = f(x) \cdot f(y)$)

Sea $x \in G$ un elemento de orden p. Entonces

$x^p = 1 \Rightarrow (x^2)^p = (x^p)^2 = 1^2 = 1$

x y todos los elementos de $\langle x \rangle$ están en $\ker f$.

Y no puede haber más porque, por hipótesis, sólo hay en G un subgrupo de orden p. Así que $\ker f$ es el único subg. de orden p y $\mathrm{Im} f \cong G/\ker f$ tiene orden $p^{r-1} = \frac{p^r}{p}$

Ahora bien, como $\mathrm{Im} f < G$ sólo tiene un subgrupo de orden p (el mismo que G) y tiene orden menor que G, nuestra hipótesis de inducción implica que $\mathrm{Im} f \cong G/\ker f$ es cíclico.

Es decir $G/\ker f = \langle y \cdot \ker f \rangle$ para algún $y \in G \setminus \ker f$.

($g \in G \Rightarrow g \cdot \ker f = (y \cdot \ker f)^d = y^d \ker f \Rightarrow y^{-d} g \in \ker f \Rightarrow y^{-d} g = k \in \ker f \Rightarrow g = y^d \cdot k$)

Se sigue que $G = \langle y \rangle \cdot \ker f$ (producto de subgrupos)

Ahora tenemos dos posibiliades:

i) $y = 1 \Rightarrow G = \ker f \Rightarrow |G| = p \Rightarrow G$ cíclico c.q.d

ii) $|\langle y \rangle| = p^d,\ d \geq 1, \Rightarrow \langle y \rangle$ tiene un subg. de orden p (T. Cauchy)

$\Rightarrow \ker f \leq \langle y \rangle \Rightarrow G = \langle y \rangle \ker f = \langle y \rangle \Rightarrow G = \langle y \rangle$ es cíclico c.q.d.

Lema 2. Sea G abeliano con $|G| = p^r$ y sea C con $|C| = p^s$ un subgrupo cíclico del mayor orden posible.

Entonces $G \cong C \times B$ para algún subgrupo B con $|B| = p^{r-s}$.

(nótese que esto acaba la demostración del teorema – i.e. de la parte 3 – aplicando inducción a B).

<u>Demostración</u> (de nuevo por inducción sobre r)

Bueno, si G es cíclico no hay nada que probar (se puede tomar $C=G$ y $B=\{1\}$)

Así que podemos suponer que no es cíclico, luego por el lema anterior ha de tener al menos dos subgrupos de orden p.

Pero C, siendo cíclico, sólo tiene uno (si $C=\langle x\rangle$, de orden p^s, este grupo es $\langle x^{p^{s-1}}\rangle$)

Por tanto, existe un subgrupo $K\leq G$ tal que

$$|K|=p \quad \text{y} \quad K\nleq C.$$

$$\Rightarrow \underset{p}{K}\cap \underset{p^s}{C}=\{1\} \Rightarrow KC\simeq K\times C \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc} kc & \longleftrightarrow & (k,c) \\ K & \longleftrightarrow & K\times\{1\}\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow KC/K \cong \frac{K\times C}{K\times\{1\}} \simeq C \quad \left(\begin{array}{l} K\times C\to C \\ (k,c)\mapsto c\end{array} \text{ es suprayec. y } \operatorname{Ker}=K\times\{1\}\right)$$

$\Rightarrow KC/K$ es cíclico de orden máximo en G/K (De hecho, de orden p^s: $C=\langle x\rangle \Rightarrow KC/K=\langle xK\rangle$, donde $o(x)=o(xK)=|C|=p^s$).

Luego, por inducción,

$$\underbrace{G/K}_{p^{r-1}} \cong \underbrace{KC/K}_{p^s}\times\bar{B}, \text{ para algún } \bar{B}\leq G/K$$

con $|\bar{B}|=p^{r-1-s}$

Ahora bien,

$$\bar{B}=B/K \text{ para algún } B\leq G \quad \left(\begin{array}{l}\pi: G\longrightarrow G/K;\ \pi(x)=xK \\ B=\pi^{-1}(\bar{B})\mapsto\bar{B}\end{array}\right)$$

$\pi(B)=B/K=\bar{B}$

con $|B|=p^{r-s}$

Y ya estamos muy cerca de poder concluir

$$C \times B \xrightarrow{\simeq} G \quad \text{es un isomorfismo, como deseábamos.}$$
$$(c, b) \longmapsto cb$$

Como $|C \times B| = |G|$ sólo falta comprobar

que $C \cap B = \{1\}$.

De momento lo que hemos visto es que $\underbrace{KC/K}_{p^s} \times \underbrace{B/K}_{p^{r-1-s}} \simeq \underbrace{G/K}_{p^{r-1}}$

$$(xK, bK) \mapsto xbK$$

$$\Rightarrow KC/K \cap B/K = \{1K\}$$

luego $y \in C \cap B \Rightarrow yK \in KC/K \cap B/K = \{1K\} \Rightarrow$

$yK = 1K \Rightarrow y \in K \Rightarrow y \in K \cap C \cap B \Rightarrow y \in K \cap C = \{1\} \Rightarrow y = 1.$

C.Q.D.

Una forma alternativa de enunciar este teorema es la siguiente:

Theorem 5.33. *Let G be a finite abelian group. Then G has isomorphism class*

$$C_{n_1} \times C_{n_2} \times \ldots \times C_{n_s}$$

for some integers $s \in \mathbb{N}$ and $n_j \geq 2$ with the property that n_{j+1} divides n_j for all $1 \leq j \leq s-1$.

This description of the isomorphism class of G is unique: if G has isomorphism class

$$C_{m_1} \times C_{m_2} \times \ldots \times C_{m_t}$$

for some integers $m_i \geq 2$ with the property that m_{i+1} divides m_i for all $1 \leq i \leq t-1$, then

$$t = s \text{ and } m_i = n_i \text{ for all } 1 \leq i \leq s.$$

Definition 5.34. The integers $n_1, \ldots, n_s$ are the 'invariant factors' of G. One sometimes says that G has 'type' $(n_1, \ldots, n_s)$.

Este teorema de clasificación de grupos abelianos finitos difiere del anterior sólo en que los grupos cíclicos que forman el producto se organizan de otra manera. Por ejemplo, en el caso de $|G| = 1800$, que hemos visto antes:

$$\begin{aligned}
C_8 \times C_9 \times C_{25} &= C_{1800}, \\
C_8 \times C_3 \times C_3 \times C_{25} &= C_{600} \times C_3, \\
C_4 \times C_2 \times C_9 \times C_{25} &= C_{900} \times C_2, \\
C_4 \times C_2 \times C_3 \times C_3 \times C_{25} &= C_{300} \times C_6, \\
C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_9 \times C_{25} &= C_{450} \times C_2 \times C_2, \\
C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_3 \times C_3 \times C_{25} &= C_{150} \times C_6 \times C_2,
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
C_8 \times C_9 \times C_5 \times C_5 &= C_{360} \times C_5, \\
C_8 \times C_3 \times C_3 \times C_5 \times C_5 &= C_{120} \times C_{15}, \\
C_4 \times C_2 \times C_9 \times C_5 \times C_5 &= C_{180} \times C_{10}, \\
C_4 \times C_2 \times C_3 \times C_3 \times C_5 \times C_5 &= C_{60} \times C_{30}, \\
C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_9 \times C_5 \times C_5 &= C_{90} \times C_{10} \times C_2, \\
C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_3 \times C_3 \times C_5 \times C_5 &= C_{30} \times C_{30} \times C_2.
\end{aligned}$$

La lista de color azul corresponde al primer enunciado del teorema y la verde, al segundo.

$G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $\quad \left.\begin{array}{l} |G| = 4 \\ \exp(G) = 2 \end{array}\right\}$

Definition 5.51. Let G be a finite group. The 'exponent' $e(G)$ of G is

$$e(G) := \min\{n \in \mathbb{N} : g^n = 1 \text{ for all } g \in G\}.$$

Remark 5.52. The exponents of isomorphic groups coincide.

Lemma 5.53. *Let G be a finite abelian group. Then*

$$e(G) = \max\{o(g) : g \in G\}.$$

Esta noción, la de exponente de un grupo, se usa en la demostración de la unicidad del teorema de clasificación de grupos abelianos finitos.

Si recordáis, nosotros no vimos todos los detalles de esta demostración (quien quiera puede mirar las notas). Y lo mismo vamos a hacer con este lema. A cambio, propongo comprobarlo en nuestra lista de grupos ($n = 1800$).

- $C_{1800} \simeq C_8 \times C_9 \times C_{25}$

$C_{1800} = \mathbb{Z}/1800\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$

$\bar{1} \to (\bar{1}, \bar{1}, \bar{1})$

$\bar{a} \mapsto (\bar{a}, \bar{a}, \bar{a})$

$\exp = 1800$

$o(\bar{1}) = o(\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}) = 1800$, $\quad \bar{1} \in \mathbb{Z}/1800\mathbb{Z}$

- $C_{150} \times C_6 \times C_2 \simeq C_{25} \times C_3 \times C_2 \times C_3 \times C_2 \times C_2$

$C_{150} = \mathbb{Z}/150\mathbb{Z}$

exponente $= 150$

$o(1, 0, 0) = 150$

$(1, 0, 0) \xleftrightarrow{\sim} (1, 1, 1; 0, 0; 0)$

orden $= 150$

Si no es abeliano esto no tiene por qué ocurrir: $G = S_3$ $|G| = 6$

$\exp(G) = 6$

$\max\{\mathrm{ord}(g) : g \in G\} = 3 \neq 6$