PROBLEMAS DE MÉTODOS MATEMÁTICOS III **1^0A *y* 1^0B**

TEMA 5 -Álgebra lineal-

HOJA Nº11 (16 – 05 – 2017)

78. Estudia si las siguientes aplicaciones definen productos escalares en $\mathbb{R}^2$ siendo $\underline{x} = (x_1, x_2)$ e $\underline{y} = (y_1, y_2)$

$a)\ f(\underline{x},\underline{y}) = 2x_1y_1 + 4x_2y_2 \qquad b)\ g(\underline{x},\underline{y}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 4x_2y_2$

$c)\ h(\underline{x},\underline{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$

79. Sean $\underline{u} = (4,0,3)$ y $\underline{v} = (1,1,3)$, en $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar canónico, halla:
a) el módulo de $\underline{u}$ y de $\underline{v}$ b) la distancia entre $\underline{u}$ y $\underline{v}$ c) El ángulo que forman

80. Comprueba si los siguientes vectores son o no ortogonales
a) $(1,0,0,3,4)$ y $(1,2,3,1,-1)$ en $\mathbb{R}^5$ con el producto escalar canónico
b) $(3,3,1)$ y $(-1,1,-1)$ en $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar $(a,b,c)\cdot(a',b',c') = aa' + 2bb' + 3cc'$
c) $f(x) = x$ y $g(x) = x+1$ en el espacio de funciones continuas $C([0,1])$ con el producto escalar $f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)dx$

81. En $\mathbb{R}^3$ se considera la matriz del producto escalar, respecto de la base canónica $\{\underline{e_1}, \underline{e_2}, \underline{e_3}\}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Halla una base ortonormal, respecto del producto escalar definido por A, del subespacio $S = L(\{\underline{e_1} - \underline{e_2}, \underline{e_2} - \underline{e_3}\})$
b) Determina $S^{\perp}$

82. En $M_2(\mathbb{R})$ con el producto escalar canónico, obtén una base ortonormal que incluya a los vectores $\underline{v_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ $\underline{v_2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$

83. En $M_2(\mathbb{R})$, con el producto escalar canónico, determina el complemento ortogonal de los siguientes subespacios

$$a)\ \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / b = c = 0 \right\}$$

$$b)\ \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / a + b + c + d = 0 \right\}$$

$$c)\ \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / a = 0 \right\}$$

84. En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar canónico, descompón $\underline{v} = (2,3,-1,4)$ en suma de dos vectores: uno perteneciente al subespacio engendrado por los vectores $\underline{v_1} = (2,1,-1,1)$ y $\underline{v_2} = (3,1,1,0)$ y el otro ortogonal a dicho subespacio.

PROBLEMAS DE MÉTODOS MATEMÁTICOS III **1^0A *y* 1^0B**

TEMA 5 -Álgebra lineal-

HOJA Nº12 (16 – 05 – 2017)

85. En $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar canónico, escribe el vector $\underline{v}$ que se da como suma de un vector de W y otro de $W^\perp$

$$a)\ W = \{(x,y,z)/\ x+2y-z = 0\};\ \underline{v} = (1,3,1)$$
$$b)\ W = \{(x,y,z)/\ x = y = z\};\ \underline{v} = (3,1,2)$$

86. Halla la proyección ortogonal del vector $\underline{v}= (1,3,5,7)$ sobre los subespacios que siguen, considerando en $\mathbb{R}^4$ el producto escalar canónico

$$a)\ L(\{(1,1,1,1),(1,-3,4,-2)\})$$
$$b)\ L(\{(1,1,1,1),(1,2,3,2)\})$$

87. En un espacio vectorial real V de dimensión 3, se considera una cierta base $\{\underline{v_1},\underline{v_2},\underline{v_3}\}$. Halla la matriz métrica G de un producto escalar definido en V sabiendo que:

a) $\|\underline{v_1}\| = \sqrt{2}$ y $\|\underline{v_2}\| = \sqrt{3}$

b) $U = \{(x,y,z) \in V/x+y+z = 0\}$ es ortogonal a $L(\{\underline{v_1}\})$

c) La proyección ortogonal de $\underline{v_1}+\underline{v_2}+\underline{v_3}$ sobre $\underline{v_2}$ es $3\underline{v_2}$

88. En $\mathbb{R}_2[x]$ se sabe que $B = \{1+x+x^2, x+x^2, x^2\}$ es una base ortonormal respecto de cierto producto escalar. Se pide:

a) Halla la matriz de dicho producto escalar en la base canónica de $\mathbb{P}_2[x]$

b) Dado el subespacio $U = L(\{1+2x+3x^2\})$ determina $U^\perp$. Obtén una base ortonormal de U

89. En $\mathbb{R}^4$ se considera la forma bilineal cuya matriz asociada en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & 10 \end{pmatrix}$$

a) Demuestra que se trata de un producto escalar y determina la proyección ortogonal del vector $\underline{u}= (4,-1,0,-\frac{2}{3})$ sobre el subespacio $U = L(\{(2,1,0,0),(1,0,-1,0)\}$

b) Calcula $U^\perp$ así como la proyección ortogonal de $\underline{u}$ sobre $U^\perp$

90. En $\mathbb{R}^3$ sea $B = \{\underline{v_1},\underline{v_2},\underline{v_3}\}$ una base que verifica

$$\underline{v_1}\cdot\underline{v_2} = 0 \quad \underline{v_1}\cdot\underline{v_1} = 1 \quad \underline{v_2}\cdot\underline{v_2} = 1 \quad \underline{v_3}\cdot\underline{v_3} = 2$$

y además $(2\underline{v_2}-\underline{v_3}) \in (L(\{\underline{v_1},\underline{v_3}\}))^\perp$. Se pide:

a) La matriz del producto escalar respecto de B

b) Calcula a partir de B una base ortonormal. ¿Qué matriz tiene asociada el producto escalar en dicha base?

c) Si $\underline{w}= (1,3,-1)_B$ ¿Cúales son sus coordenadas respecto de la base ortonormal calculada? Calcula su norma respecto de las dos bases. ¿Qué relación hay entre los dos valores obtenidos? Razona la respuesta.

91. Determina en $\mathbb{R}^4$ una base del subespacio U y halla $U^\perp$.

$$U = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4/x_1+3x_2-x_3+2x_4 = 0, 2x_1-x_2+3x_3-x_4 = 0\}$$