PROBLEMAS DE MÉTODOS MATEMÁTICOS III **1^0A y 1^0B**

TEMA 1 -Cálculo-

HOJA Nº1 (14 – 02 – 2017)

1. Halla las expresiones como series de potencias para las siguientes funciones $f(x)$

$$a)\ f(x) = \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \ldots$$

$$b)\ f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{9}x^9 + \cdots$$

$$c)\ f(x) = x + 2x^3 + 3x^5 + 4x^7 + \ldots$$

$$d)\ f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

2. Halla el intervalo de convergencia de las series de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(n+1)(n+2)}(x-1)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+3)!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2}\left(\frac{x-2}{3}\right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

3. Estudia la convergencia de las series de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n^2} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{n-1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{10^n} x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} x^n$$

4. Determina el intervalo de convergencia de las series de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{4n} \qquad c > 0,\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-c)^{n-1}}{c^{n-1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} (-2x)^{n-1} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}+1}{(2n+1)!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-5)^n}{n5^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} (-2x)^{n-1} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (2n)!\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

5. Halla el intervalo de convergencia de $f(x)$ y de $f'(x)$ siendo

$$a)\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \qquad b)\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{n+1}$$

PROBLEMAS DE MÉTODOS MATEMÁTICOS III **1^0A y 1^0B**

TEMA 1 -Cálculo-

HOJA Nº2 (14 – 02 – 2017)

6. Dada la función polinómica $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ desarróllala en potencias de $(x-3)$

7. Usando los polinimios de Maclaurin, justifica las aproximaciones que siguen

$$(1+x)^n \approx 1 + nx \qquad a^x \approx 1 + x\ln a$$
$$\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{n}$$

8. Escribe, a partir de series de potencias conocidas, la serie de Maclaurin de las funciones

$$\cos(x^2) \qquad sen(x^5)$$
$$xe^{-2x} \qquad \cos^2 x$$

9. Halla los primeros cinco términos del polinomio de Maclaurin para $e^x(senx)$

10. Determina los cuatro primeros términos no nulos del polinomio de Maclaurin de la función dada

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \qquad f(x) = \ln(1+x)$$
$$f(x) = sen(x) \qquad f(x) = \frac{1}{1+5x}$$

11(**Ex**). Halla la serie de Maclaurin de $f(x) = \ln(1+2x^2)$ y determina el intervalo de convergencia de la serie de potencias obtenida.

12. Halla el polinomio de Taylor de grado n centrado en c para cada una de las funciones siguientes

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad n = 3 \quad c = 4 \qquad f(x) = e^{-2x} \quad n = 4 \quad c = \tfrac{1}{2}$$
$$f(x) = \ln(x+1) \quad n = 4 \quad c = 2 \qquad f(x) = \sqrt{x} \quad n = 3 \quad c = 1$$

13. Calcula un valor aproximado de $\ln 0'7$ con un error menos que 10^{-2}

14. Si se aproxima $sen(x)$ por $x - \frac{x^3}{3!}$ para $|x| < 0,5$. ¿Cuál es un límite en el error?

15. Estima $e^{0'2}$ con un error inferior a $0'001$.

16. Encuentra una cota superior del error que se comete en la aproximación$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}$

17. Calcula un valor aproximado de $\sqrt[3]{1'40}$, usando el polinimio de Maclaurin de orden tres de la función $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$

18. ¿Son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes?

- Si $P_n(x)$ es el polin. de T. de grado n para $f(x)$ en $x_0 = 0$ entonces $P_n''(0) = \frac{f''(0)}{2!}$.
- $\forall\, f$ función par, el polin. de Maclaurin de grado n tiene sólo potencias pares de x.
- Si $f(x) = tg\, x$ entonces el polin. de Maclaurin de grado 1 es $1 + x$.
- El polinomio de Maclaurin de $f(x) = sen(x)$ tiene sólo potencias pares.
- No existe el polinomio de Maclaurin para $f(x) = \ln(x)$.