Ampliación de Ecuaciones en Derivadas Parciales

José Carrillo

Departamento Análisis Matemático y Matemática Aplicada
Universidad Complutense de Madrid

ESPACIOS DE HILBERT

1. Definiciones

Definición 1.1. *Sea H un espacio vectorial, un producto escalar sobre H es una aplicación $(.,.) : H \times H \mapsto \mathbb{R}$, que es definida positiva, simétrica y bilineal, es decir que verifica que, para todo par α y $\beta \in \mathbb{R}$ y para toda terna x, y y $z \in H$,*

- $(x,x) \geq 0,\ (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$ *definida positiva;*
- $(x,y) = (y,x),$ *simétrica;*
- $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z),$ *bilineal.*

Un producto escalar permite definir una norma:

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}.$$

Es obvio comprobar que esta expresión cumple las dos primeras condiciones de las normas: $[\|x\| \geq 0,\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0]$ y $[\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|]$ para todo $x \in H$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Sin embargo resulta más costoso demostrar la desigualdad triangular. Para ello necesitaremos demostrar el siguiente teorema:

Teorema 1.2. *Sea x e $y \in H$. Entonces tenemos*

1. $|(x,y)| \leq \|x\|\,\|y\|$ *(Desigualdad de Schwarz o de Cauchy-Schwarz según los autores).*
2. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ *(Desigualdad del paralelogramo).*

Demostración **Desigualdad de Schwarz** Sea $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$0 \leq (tx+y, tx+y) = t^2(x,x) + 2t(x,y) + (y,y) = P(t).$$

$P(t)$ es un polinomio de grado 2 en t luego

$$P(t) \geq 0 \Longleftrightarrow (x,y)^2 - (x,x)\,(y,y) \leq 0,$$

lo que demuestra la desigualdad de Schwarz.

Desigualdad del paralelograma Para todo x y todo $y \in H$ tenemos

$$\|x \pm y\|^2 = (x \pm y, x \pm y) = (x,x) \pm 2\,(x,y) + (y,y)$$

luego

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \quad \textbf{Q.E.D.}$$

Para demostrar que $\|.\| = \sqrt{(.,.)}$ verifica la desigualdad triangular utilizaremos la desigualdad de Schwarz:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= (x+y, x+y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x,y) \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2 . \quad \textbf{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Definición 1.3. *Sea H un espacio vectorial dotado de un producto escalar. H es un espacio de Hilbert si y solo si es completo para la topología inducida por la norma correspondiente al producto escalar.*

Ejemplo 1. *El espacio $\mathbb{R}^N$ dotado del producto escalar*

$$(x,y)_{\mathbb{R}^N} = \sum_{j=1}^{N} x_j y_j,$$

siendo $x = (x_1, \ldots ; x_N)$, $y = (y_1, \ldots, y_N)$ y de la norma asociada, la norma euclídea,

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{N} x_j^2 \right)^{1/2}$$

es un espacio de Hilbert.

Ejemplo 2. *Consideremos el conjunto*

$$\ell^2 = \{x = \{(x_n)_{n\in N}\} \subset \mathbb{R} / \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^2 < +\infty\}.$$

Es fácil comprobar que

$$(x,y)_{\ell^2} = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n$$

es un producto escalar y que ℓ^2 es completo para la norma asociada:

$$\|x\|_{\ell^2} = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^2 \right)^{1/2} .$$

Ejemplo 3. *Sea $L^2(\Omega)$ el espacio de las funciones de cuadrado integrable sobre el abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ para la medida de Lebesgue. $L^2(\Omega)$, dotado del producto escalar*

$$(u,v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx$$

y de la norma asociada

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega u(x)^2\,dx \right)^{1/2}$$

es un espacio de Hilbert.

Cuando el producto escalar entre dos elementos es nulo se dice que los elementos son ortogonales
$$(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x \perp y.$$

Definición 1.4. *Sea H un espacio de Hilbert y sea $A \subset H$. El ortogonal de A, $A^\perp$, es*
$$A^\perp = \{x \in H / \, (x, y) = 0 \; \forall \, y \in A\}.$$

Proposición 1.5. *Sea H un espacios de Hilbert y sea $A \subset H$. Entonces, el ortogonal de A es un subespacios vectorial cerrado de H.*

Demostración **Veamos que $\mathbf{A}^\perp$ es cerrado** Sea $\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\} \subset A^\perp$ convergente a x. Entonces, dada la continuidad del producto escalar, para todo $y \in A$ se tiene
$$0 = (x_n, y) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (x, y) \Longrightarrow (x, y) = 0,$$
luego $x \in A^\perp$.

Veamos que $\mathbf{A}^\perp$ es un subespacio vectorial Sean x, $z \in A^\perp$ y sean $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, entonces, por la (bi)linealidad del producto escalar se tiene
$$(\alpha x + \beta z) = \alpha(x, y) + \beta(z, y) = 0 \quad \forall \, y \in A,$$
luego $\alpha x + \beta z \in A^\perp$. **Q.E.D.**