3. Bases hilbertianas

Un espacio de Banach (en particular, un espacio de Hilbert) es separable si posee un subconjunto numerable y denso.

Por ejemplo, $\mathbb{R}$ es separable porque $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ es numerable y, obviamente denso. Asimismo $\mathbb{Q}^N \subset \mathbb{R}^N$ son subconjuntos numerables y densos. Asimismo, cualquier espacio vectorial de dimensión finita es separable ya que es isomorfo a un espacio $\mathbb{R}^N$.

En dimensión infinita la cosa difiere. También existen espacios separables de dimensión infinita, es el caso de los espacios L^p para $1 \leq p < \infty$. Sin embargo, no todos los espacios son separables, es el caso de L^∞.

Definición 3.1. *sea H un espacio de Hilbert, $(.,.)$ su producto escalar. Una base hilbertiana es una sucesión $\{(w_k)_{k\in\mathbb{N}}\} \subset H$ tal que*

$$(w_k, w_j) = \delta_{k,j}$$

y $\forall\, x \in H$,

$$x = \sum_{k\in\mathbb{N}} (x, w_k)\, w_k. \tag{9}$$

Nota 2. *La relación (9) equipara cada elemento a una serie de Fourier generalizada cuyos "coeficientes de Fourier" son (x, w_k).*

De esta relación se deduce que si H posee una base hilbertiana entonces todo elemento de H es límite de combinaciones lineales finitas de elementos de la base:

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (x, w_k)\, w_k.$$

Nota 3. *La relación (9) permite establecer la igualdad de Bessel-Parseval que generaliza el Teorema de Pitágoras:*

$$\|x\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} (x, w_k)^2.$$

Nota 4. *Sea H un espacio de Hilbert con una base hilbertiana $\{(w_k)_{k\in\mathbb{N}}\}$ si sea V el subespacio cerrado engendrado por $(w_1, \ldots, w_N)$ ($V = Span[w_1, \ldots, w_N]$). Entonces*

$$P_V(x) = \sum_{k=1}^{N} (x, w_k) w_k.$$

Proposición 3.2. *Todo espacio de Hilbert separable posee un base hilbertiana.*

Demostración Sea $\{(z_k)_{k\in\mathbb{N}}\} \subset H$ un subconjunto numerable y denso de H. Por el procedimiento de Gram-Schmidt vamos a construir una base hilbertiana de H:

$$\begin{array}{ll}
\tilde{w}_1 = z_1, & w_1 = \dfrac{\tilde{w}_1}{\|\tilde{w}_1\|} \\
\dots & \dots \\
\tilde{w}_k = z_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1}(z_k, w_j)w_j, & w_k = \dfrac{\tilde{w}_k}{\|\tilde{w}_k\|} \\
\dots & \dots
\end{array}$$

Se comprueba trivialmente que

$$(w_k, w_j) = \delta_{k,j}.$$

Además, dado que $\{(z_k)_{k\in\mathbb{N}}\}$ es denso en H, las combinaciones lineales finitas de $\{(w_k)_{k\in\mathbb{N}}\}$ son densas en H. **Q.E.D.**

Nota 5. *De la Proposición 3.2 se deduce que todo espacio de Hilbert separable es isomorfo e isométrico al espacio ℓ^2 introducido en el Ejemplo 2.*

Nota 6. *Si H no es separable, el* **Lema de Zorn** *permite establecer la existencia de una base hilbertiana no numerable*