# 5. Teoremas de Stampacchia y de Lax-Milgram

## 5.1. Formas bilineales y operadores asociados.

**Definición 5.1.** *Sean $X$ y $Z$ dos espacios vectoriales. Entonces, una forma bilineal sobre $X \times Z$ es una función*

$$a : X \times Z \mapsto \mathbb{R}$$

*tal que*

*1) $\forall x \in X$, $z \mapsto a(x, z)$ es lineal sobre $Z$;*

*2) $\forall z \in Z$, $x \mapsto a(x, z)$ es lineal sobre $X$.*

*Cuando $X = Z$ hablaremos de "formas bilineales sobre $X$".*

Ya hemos visto ejemplos de formas bilineales, por ejemplo, el producto escalar en un espacio de Hilbert es una forma bilineal.

**Definición 5.2.** *Sea $H$ un espacio de Hilbert y sea $a(.,.)$ una forma bilineal sobre $H$. entonces:*

*1) $a(.,.)$ es continua $\Leftrightarrow$*

$$\exists\, C > 0 \quad t.q. : \quad |a(u, v)| \leq C \,\|u\|\,\|v\| \quad \forall\, u,\ v \in H.$$

*2) $a(.,.)$ es simétrica $\Leftrightarrow$*

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall\, u,\ v \in H.$$

*3) $a(.,.)$ es coercitiva (o coerciva) $\Leftrightarrow$*

$$\exists\, \alpha > 0 \quad t.q. : \quad |a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2 \quad \forall\, u \in H.$$

**Nota 13.** *Sea $H$ un espacio de Hilbert con el producto escalar $(.,.)$, se comprueba trivialmente que una forma bilineal continua, simétrica y coerciva es un producto escalar que define una norma equivalente a la norma inducida por $(.,.)$.*

**Nota 14.** *Sea $H$ un espacio de Hilbert y sea $a(.,.)$ un forma bilineal y continua sobre $H$. Para todo u fijado, la aplicación*

$$v \mapsto a(u, v)$$

*es un elemento de $H'$ ya que es lineal y continua sobre $H$. Aplicando el Teorema de Representación de Riesz existe un elemento de $H$ que notaremos $Au$ tal que*

$$(Au, v) = a(u, v) \quad \forall\, v \in H.$$

*se comprueba facilmente que el el operador $A$ así definido es un operador lineal y continuo de $H$ sobre $H$.*

*$A$ será el operador asociado a la forma bilineal $a(.,.)$.*

## 5.2. Teorema de Stampacchia.

**Teorema 5.3. Teorema de Stampacchia** *Sea $H$ un espacio de Hilbert, sea $a(.,.)$ una forma bilineal, continua y coercitiva sobre $H$ y sea $\mathbb{K} \subset H$ un convexo cerrado no vacio. Entonces, para todo $L \in H'$ existe un $u$ único de $\mathbb{K}$ tal que*

$$a(u, v-u) \geq \langle L, v-u \rangle_{H' \times H} \quad \forall\, v \in \mathbb{K}. \tag{12}$$

*Si $u_i \in \mathbb{K}$ es la solución correspondiente al funcional $L_i$, para $i = 1, 2$, entonces*

$$\|u_1 - u_2\| \leq \frac{\|L_1 - L_2\|}{\alpha}. \tag{13}$$

*Además, si $a(.,.)$ es simétrica, entonces la solución $u$ de la inecuación variacional (12) se caracteriza por ser el único elemento de $\mathbb{K}$ que verifique:*

$$\frac{1}{2}a(u,u) - \langle L, u \rangle_{H' \times H} = \min_{v \in \mathbb{K}} \left[ \frac{1}{2}a(v,v) - \langle L, v \rangle_{H' \times H} \right]. \tag{14}$$

La demostración del **Teorema de Stampacchia** requiere la aplicación del teorema de punto fijo de Banach:

**Teorema de Punto Fijo de Banach** *Sea $E$ un espacio métrico completo y sea $S$ una contracción estricta sobre $E$, i.e. $S : E \mapsto E$ y existe $0 < \kappa < 1$ tal que*

$$d(S(x), S(y)) \leq \kappa\, d(x,y) \quad \forall\, x,\ y \in E.$$

*Entonces $S$ posee un único punto fijo, i.e. existe un único $x \in E$ tal que $x = S(x)$.*

**Demostración del Teorema de Punto Fijo de Banach** Partimos de un $x_1$ arbitrario de $E$ y definimos la sucesión

$$x_{i+1} = S(x_i) \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

**i) El conjunto $\{(\mathbf{x_i})_{\mathbf{i}\in\mathbb{N}}\} \subset E$ es una sucesión de Cauchy** En efecto, sean $i,\ j \in \mathbb{N}$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $i \geq j$, entonces, aplicando reiterativamente la desigualdad triangular y, luego, teniendo en cuenta que $S$ es una contracción, se tiene

$$\begin{aligned} d(x_i, x_j) &\leq d(x_i, x_{i-1}) + d(x_{i-1}, x_{i-2}) + \cdots + d(x_{j+1}, x_j) \\ &\leq \kappa\, d(x_{i-1}, x_{i-2}) + \kappa\, d(x_{i-2}, x_{i-3}) + \cdots + \kappa\, d(x_j, x_{j-1}) \end{aligned}$$

$$\leq \kappa^{i-1} d(x_1, x_0) + \kappa^{i-2} d(x_1, x_0) + \cdots + \kappa^j d(x_1, x_0)$$
$$\leq \kappa^j \left(\kappa^{i-j-1} + \kappa^{i-j-2} + \cdots + \kappa + 1\right) d(x_1, x_0)$$

luego

$$d(x_i, x_j) \leq \frac{\kappa^j}{1-\kappa}\, d(x_1, x_0) \stackrel{i,j\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

**ii) Existencia del punto fijo** Dado que $E$ es completo la sucesión de Cauchy $\{(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\}$ tiene un límite $x \in E$ cuando $i \to \infty$. Pasando al límite en la identidad $x_{i+1} = S(x_i)$, teniendo en cuenta que al ser contractiva, $S$ es continua, se obtiene

$$x = S(x).$$

**iii) Unicidad del punto fijo** Supongamos que $x,\ y \in E$ son dos puntos fijos, entonces

$$d(x, y) = d(S(x), S(y)) \leq \kappa d(x, y)$$

luego

$$(1-\kappa)\, d(x, y) \leq 0 \Longrightarrow d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y.$$

**Q.E.D.**

**Demostración del Teorema de Stampacchia** Aplicando el teorema de representación de Riesz existe $f \in H$ tal que

$$\langle L, v\rangle_{H'\times H} = (f, v) \quad \forall\, v \in H.$$

Por otra parte, sea $A$ el operador lineal y continuo sobre $H$ asociado a la forma bilineal $a(.,.)$:

$$a(u, v) = (Au, v).$$

Se observa que

$$\|Au\| \leq C\|u\| \quad \forall\, u \in H \tag{15}$$

y que

$$(Au, u) \geq \alpha\|u\|^2 \quad \forall\, u \in H. \tag{16}$$

Entonces, la inecuación variacional (12) equivale a encontrar $u \in \mathbb{K}$ tal que

$$(Au, v-u) \geq (f, v-u) \quad \forall\, v \in \mathbb{K} \tag{17}$$

o

$$0 \geq (f - Au, v-u) \quad \forall\, v \in \mathbb{K} \tag{18}$$

Se introduce un parámetro real $\beta > 0$, entonces (18) equivale a hallar $u \in \mathbb{K}$ tal que

$$0 \geq (\beta\,(f - Au) + u - u, v - u) \quad \forall\, v \in \mathbb{K} \tag{19}$$

lo cual equivale a decir que

$$u = P_{\mathbb{K}}(\beta\,(f - Au) + u)$$

i.e. $u$ es punto fijo de la aplicación $S$ definida por

$$S(v) = P_{\mathbb{K}}(\beta\,(f - Av) + v) \quad \forall\, v \in H.$$

**Se fija el parámetro $\beta$ de tal modo que $S$ sea una contracción estricta**
Dado que la proyección sobre un convexo cerrado es una contracción (no estricta) tenemos

$$\|S(v) - S(w)\| \leq \|v - w - \beta\,(Av - Aw)\|$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}\|S(v) - S(w)\|^2 &\leq \|v - w\|^2 - 2\beta(Av - Aw, v - w) + \beta^2\|Av - Aw\|^2 \\ &\leq \|v - w\|^2\,(1 - 2\,\alpha\,\beta + \beta^2\,C^2).\end{aligned}$$

Luego, para que $S$ sea una contracción estricta, es suficiente fijar $\beta$ para que

$$1 - 2\,\alpha\,\beta + \beta^2\,C^2 < 1$$

lo que se cumple si

$$0 < \beta < \frac{2\,\alpha}{C^2}.$$

**Conclusión** Para $\beta \in (0, 2\,\alpha/C^2)$ $S$ es una contracción estricta luego tiene un único punto fijo $u = S(u)$. Obviamente $u \in \mathbb{K}$, ya que $\mathrm{Im}(S) \subset \mathbb{K}$, y $u$ es la única solución de la inecuación variacional (12).

**Estabilidad** Para demostrar la desigualdad (13) se toma la solución $u_i$ correspondiente al funcionale $L_i$, para $i = 1, 2$. Teniendo en cuenta que $u_i \in \mathbb{K}$ se tiene

$$a(u_1, u_2 - u_1) \geq \langle L_1, u_2 - u_1\rangle_{H' \times H}$$

y

$$a(u_2, u_1 - u_2) \geq \langle L_2, u_1 - u_2\rangle_{H' \times H}$$

y sumando las anteriores desigualdades se obtiene

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq \langle L_1 - L_2, u_1 - u_2\rangle_{H' \times H}.$$

De la coercitividad de $a(.,.)$ y la continuidad de $L_1 - L_2$ se obtiene

$$\alpha\|u_1 - u_2\|^2 \leq \|L_1 - L_2\|\,\|u_1 - u_2\|$$

de donde se deduce (13).

**Supongamos ahora que** $a(.,.)$ **es simétrica.** Entonces $a(.,.)$ es un producto escalar sobre $H$ que define una norma, $\|.\|_a$, equivalente a la norma asociada al producto escalar $(.,.)$:

$$\alpha\|v\|^2 \leq a(v,v) = \|v\|_a^2 \leq C\|v\|^2.$$

Según el Teorema de Riesz existe un único $g \in H$ tal que

$$\langle L, v\rangle_{H'\times H} = a(g,v) \quad \forall\, v \in H.$$

La inecuación variacional (12) se expresa entonces como sigue:

$$\text{Hallar } u \in \mathbb{K} \text{ t.q.} \quad 0 \geq a(g-u, v-u) \quad \forall\, v \in \mathbb{K}.$$

Por el Teorema 2.1 sabemos que existe un único $u$ verificando la anterior desigualdad, $u$ es la proyección sobre $\mathbb{K}$, según la norma $\|.\|_a$, de $g$ y se caracteriza por minimizar la distancia a $g$

$$\|u-g\|_a \leq \|v-g\|_a \quad \forall\, v \in \mathbb{K}$$

$\Longleftrightarrow$

$$a(u,u) - 2a(g,u) \leq a(v,v) - 2a(g,v) \quad \forall\, v \in \mathbb{K}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\frac{1}{2}a(u,u) - \langle L, u\rangle_{H'\times H} \leq \frac{1}{2}a(v,v) - \langle L, v\rangle_{H'\times H} \quad \forall\, v \in \mathbb{K}.$$

**Q.E.D.**

En el caso en que $\mathbb{K} = H$ se tiene:

**Corolario 5.4.** *Sea $H$ un espacio de Hilbert y sea $a(.,.)$ una forma bilineal, continua y coercitiva sobre $H$. Entonces, para toda $L \in H'$ existe un único $u \in H$ tal que*

$$a(u,v) = L\,v \ \ (= \langle L, v\rangle_{H'\times H}) \quad \forall\, v \in H. \tag{20}$$

*Si $u_i \in H$ es la solución correspondiente al funcional $L_i$, para $i = 1,\, 2$, entonces*

$$\|u_1 - u_2\| \leq \frac{\|L_1 - L_2\|}{\alpha}. \tag{21}$$

*En particular*

$$\|u\| \leq \frac{\|L\|}{\alpha}. \tag{22}$$

*Además, si $a(.,.)$ es simétrica, $u$ se caracteriza por ser el único elemento de $V$ tal que*

$$a(u,u) - \frac{1}{2}Lu = \min_{v\in H}\left[a(v,v) - \frac{1}{2}Lv\right]. \tag{23}$$

**Demostración** Aplicamos el Teorema de Stampacchia con $\mathbb{K} = H$: existe un único $u \in H$ tal que

$$a(u, v-u) \geq L(v-u) \quad \forall\, v \in H.$$

Para cualquier $w \in H$ se tiene que $v = \pm\, w + u \in H$ luego

$$\pm\, a(u, w) \geq \pm\, Lw \quad \forall\, w \in H,$$

de lo que se deduce que

$$a(u, w) = Lw \quad \forall\, w \in H.$$

La desigualdad (21) es consecuencia directa de (13) y la desigualdad (22) se deduce de (21) teniendo en cuenta que al funcional $L = 0$ le corresponde la solución $u = 0$.

Además, si $a(.,.)$ es simétrica de (14) se deduce (23). **Q.E.D.**

## Referencias


[1] H. Brézis, *Análisis funcional, Teoría y aplicaciones.* Edit. Alhambra, 1983.

[2] W. Rudin, *Análisis funcional.* Edit. Reverté S.A. 1979.