

# Álgebra Lineal

## Sistemas de ecuaciones lineales

1) Resolver los tres sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes en  $\mathbf{R}$  siguientes:

$$\begin{array}{lll} 3x - 2y = 6 & x + y - 2z = 9 & 2x - 4y + 7z = 31 \\ 6x + 6y = 102 & 2x - y + 4z = 4 & 2x + 3y + 5z = 11 \\ & 2x - y + 6z = -1 & x - 5y + 6z = 29 \end{array}$$

2) Discutir los dos sistemas siguientes en función del parámetro  $m$  y de los parámetros  $r$  y  $s$  respectivamente:

$$\begin{array}{ll} x + 2y + z = 1 & 3x + y + rz = 0 \\ -x + 2z = 3 & x - y - z = 0 \\ 3x + 2y + mz = 1 & sx + y + z = 0 \\ & x + sy - z = 0 \end{array}$$

3) Resolver, si es posible, los sistemas lineales siguientes:

$$\begin{array}{ll} x + 2y + 2z - s + 3t = 0 & 3x_2 - 6x_3 - 4x_4 - 3x_5 = -5 \\ x + 2y + 3z + s + t = 0 & -x_1 + 3x_2 - 10x_3 - 4x_4 - 4x_5 = -2 \\ 3x + 6y + 8z + s + 5t = 0 & 2x_1 - 6x_2 + 20x_3 + 2x_4 + 8x_5 = -8 \end{array}$$

4) Llamamos *Transformaciones elementales por filas (o columnas)* de una matriz a las modificaciones de los tipos siguientes:

- ( a): Intercambiar el orden de dos filas (o columnas)
- ( b) Sustituir una fila (columna) por ella misma multiplicada por una constante no nula
- ( c) Sustituir una fila (columna) por ella misma sumada a otra fila (columna) multiplicada por una constante.

Identificar las transformaciones elementales aplicadas a la matriz identidad para llegar a las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Problemas relacionados con la vida cotidiana y las ciencias:**

5) Un granjero desea construir tres corrales rectangulares adyacentes para pollos, pavos y cerdos. Cada corral debe tener el mismo tamaño y el perímetro externo de todos debe ser 150 metros. Si se necesitan 200 metros de cerca en total, calcular utilizando ecuaciones lineales la dimensiones del corral de los pavos.

6) Los billetes para un concierto cuestan 5, 3 y 2 euros respectivamente. Se vendió el doble de billetes de 5 que de 2 euros. Los talonarios de 750 billetes dieron una recaudación de 2625 euros por talonario. Calcular utilizando ecuaciones lineales cuántos billetes de un talonario se vendieron de cada precio.

7) Un excursionista comprueba, tras recorrer 7 km en la primera hora, que manteniendo ese ritmo, llegaría con una hora de retraso al tren que pretende tomar. Acelera el paso y durante el resto del camino recorre 10 km cada hora, por lo que llega con media hora de adelanto a la estación. ¿Cuánto tiempo estuvo andando? ¿Qué distancia recorrió?

8) Un escultor forestal labra tres tipos de estatuas con una sierra de cadena. El tiempo que tarda para labrar, lijar y pintar un poste de tótem, un oso y un ciervo son los siguientes:

Labrar: Tótem, 2 horas; Oso, 2 horas; Ciervo, 1 hora; Tiempo disponible: 14 horas

Lijar: Tótem, 1 hora; Oso, 2 horas; Ciervo, 2 horas; Tiempo disponible: 15 horas

Pintar: Tótem, 3 horas; Oso, 2 horas; Ciervo, 2 horas; Tiempo disponible: 21 horas

Calcular, utilizando ecuaciones lineales cuántas esculturas de cada tipo debe producir para llenar todas las horas de trabajo disponible

9) Un comerciante de telas vende cada metro un 30,2% más caro que el precio al que lo compra. Desea aumentar sus ganancias sin incrementar los precios para lo cual decide emplear un *falso metro* para medir la tela delante de sus clientes. Indicar cuánto ha de medir este falso metro para que sus ganancias pasen a ser del 40%

**Problemas que relacionan Álgebra y Geometría**

**10)** La suma de los ángulos de cualquier triángulo es 180 grados; en el triángulo de vértices  $A, B, C$ , el ángulo de  $A$ , es 100 grados menor que la suma de los otros dos ángulos y el ángulo de  $C$  es 40 grados menor que el doble del ángulo de  $B$ . Calcular, utilizando ecuaciones lineales, el valor de cada ángulo.

**11)** Sea  $Ax + By + Cz + D = 0$  la ecuación del plano de  $\mathbf{R}^3$  que pasa por los puntos  $(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)$ . Calcular el valor de  $A, B, C, D$  utilizando ecuaciones lineales.

**12)** Resolver el sistema de ecuaciones siguiente e interpretarlo como la intersección de dos rectas en el plano  $\mathbf{R}^2$ :

$$\begin{aligned}x + y &= 2 \\3x - y &= 2\end{aligned}$$

**13)** La misma cuestión del problema 10) para la circunferencia de  $\mathbf{R}^2$ ,  $x^2 + y^2 + 2ax + 2by = c$ , que pasa por los puntos  $(0, 0), (2, 0), (1, 1)$ . Calcular el valor de  $a, b, c$ .

### Otros problemas

**14)** Si la suma de tres números reales es el doble de la suma del primero y el tercero y el primero menos el segundo es el triple del tercero, probar que alguno de los tres números tiene que ser cero. ¿Cuántas ternas de números hay que cumplan estas condiciones?

**15)** Sean  $x, y$  dos números reales. Si verifican las dos condiciones

$$x^2 + y^2 = 9; x^2 - 8y^2 = 1$$

, utilizar ecuaciones lineales para calcular los valores que pueden tomar  $x$  e  $y$ .