

Hoja 3

Decimos **curva espacial** para referirnos a cualquier curva en \mathbb{R}^3 .

Una curva espacial α es **birregular** si su vector curvatura \mathbf{k} es distinto de $\mathbf{0}$ en cada punto de α . Esto permite definir la **normal** $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\|\mathbf{k}\|$ y la **binormal** $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$.

Si $\alpha(t)$ es cualquier parametrización regular (no necesariamente por longitud de arco) entonces la curva es birregular si y sólo si $\alpha'(t)$ y $\alpha''(t)$ son linealmente independientes para todo t .

Nota: Saber hacer los ejercicios marcados con un asterisco es fundamental para la correcta comprensión del material.

- (*) Sea $\alpha(t)$ un camino regular (no necesariamente birregular) en el espacio. Demuestra que α está contenido en una esfera de centro el punto \mathbf{p}_0 si y sólo si los planos normales afines de α pasan todos por \mathbf{p}_0 .

- (*) Sean a, b, c constantes con $c^2 = a^2 + b^2$ y $c > 0$. Consideramos la **hélice circular**:

$$\alpha(s) = \left(a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, b \frac{s}{c} \right).$$

- Demuestra que $\alpha(s)$ es parametrización por longitud de arco.
 - Halla el plano osculador, la curvatura y la torsión de α .
 - Comprueba que las tangentes de α forman un ángulo constante con el eje z .
 - Comprueba que las normales de α forman ángulo recto con el eje z .
- (*) Se dice que una curva en \mathbb{R}^3 es una **hélice generalizada** si es regular y forma un ángulo constante, no nulo, con una dirección fija (llamada *eje de hélice*). Demuestra que las hélices generalizadas con eje de hélice vertical admiten parametrizaciones de la forma:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), c_0 + c_1 t),$$

siendo $\gamma_0(t) = (x(t), y(t))$ una curva plana parametrizada por longitud de arco y c_0, c_1 constantes. Demuestra que γ es birregular si y sólo si lo es γ_0 .

- Sea $\alpha(s)$ curva birregular parametrizada por longitud de arco, con curvatura k y torsión τ . Definimos una nueva curva paramétrica β mediante $\beta(s) = \mathbf{t}_\alpha(s)$. Comprueba que β es parametrización regular ¿es una parametrización por longitud de arco?

Demuestra que $\mathbf{k}_\beta = \frac{\tau}{k} \mathbf{b}_\alpha - \mathbf{t}_\alpha$. (**Indicación:** calcula $\beta'(s)$ y $\beta''(s)/\|\beta'(s)\|$).

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

que a esta contenido en una circunferencia.

Cartagena99

8. (*) Dada una curva espacial birregular ¿pueden pasar todas sus binormales afines por un mismo punto?
9. Demuestra que, dadas constantes cualesquiera k_0, τ_0 con $k_0 > 0$, hay una hélice circular (ejercicio 2) que las realiza como curvatura y torsión. Deduce que una curva birregular está contenida en una hélice circular si y sólo si su curvatura y su torsión son constantes.
10. Sea α curva espacial birregular y supongamos que es, además, una hélice generalizada (ver ejercicio 3). Demuestra que las normales de α son perpendiculares al eje de hélice.
11. (*) **(Teorema de Lancret)**. Sea α una curva birregular con curvatura k y torsión τ . Demuestra que las condiciones siguientes son equivalentes:
 - (a) α es una hélice generalizada (ver ejercicio 3).
 - (b) El vector \mathbf{t}_α traza una circunferencia en el espacio.
 - (c) El cociente τ/k es constante.

Indicación: el eje de hélice coincidirá con el de la circunferencia trazada por \mathbf{t}_α .

12. Sean $\alpha(t), \beta(t) : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ dos curvas birregulares que utilizan el mismo parámetro (no necesariamente la longitud de arco). Suponiendo que cumplen las identidades:

$$k_\alpha(t) = k_\beta(t) \quad , \quad \tau_\alpha(t) = \tau_\beta(t) \quad , \quad \|\alpha'(t)\| = \|\beta'(t)\| \quad ,$$

demuestra que existe un movimiento directo $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\beta(t) = \varphi \circ \alpha(t)$.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70