

HOJA DE EJERCICIOS 7
Análisis Matemático.
CURSO 2017–2018.

Problema 1. Consideramos el abierto $U_0 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\}$ y la función:

$$f : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2) = \left(\sqrt{x_1} + \frac{1}{2}x_2^2, x_2\sqrt{x_1} + \frac{1}{3}x_2^3 \right),$$

donde $\sqrt{x_1}$ denota la raíz positiva.

(a) Demuestra que f tiene una inversa local $g = (g_1, g_2)$ de clase \mathcal{C}^1 en un entorno V de $y^0 = \left(\frac{3}{2}, \frac{4}{3}\right)$ y tal que $g(y^0) = (1, 1)$.

(b) Demuestra que en V se cumple la siguiente identidad:

$$Dg \equiv \begin{pmatrix} 2\sqrt{g_1} + 2g_2^2 & -2g_2 \\ \frac{-g_2}{\sqrt{g_1}} & \frac{1}{\sqrt{g_1}} \end{pmatrix}.$$

(c) Calcula la matriz hessiana de g_1 , en el punto general de V , como una combinación explícita de los valores g_1, g_2 .

(d) Calcula el número $\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} g_2(y^0)$.

Problema 2. Demuestra que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x - \sin x$ es biyectiva. Demuestra que su inversa f^{-1} no es derivable en 0.

Problema 3. Demuestra que existe una única función $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de clase \mathcal{C}^1 en un entorno U de $(0, 0)$, con $f(0, 0) = 0$ y tal que

$$e^{f(x,y)} = (1 + x e^{f(x,y)}) (1 + y e^{f(x,y)}) \quad \text{en todos los } (x, y) \in U.$$

Problema 4. Prueba que la ecuación

$$\operatorname{sen}(yz) + \operatorname{sen}(xz) + \operatorname{sen}(xy) = 0$$

admite una única solución $z = f(x, y)$ de clase \mathcal{C}^1 en un entorno del punto $(\pi, 0)$ y cumpliendo $f(\pi, 0) = 1$. Calcula el polinomio de Taylor de orden uno de f en dicho punto.

Problema 5. Dibuja los abiertos

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4, y > -\frac{1}{2}|x|\}, \quad U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4, y < \frac{1}{2}|x|\}.$$

Halla una inversa del cambio a polares definida en U_1 y otra definida en U_2 . Demuestra que, sin embargo, no hay ninguna inversa local continua en $U_1 \cup U_2$.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Recordemos las siguientes **definiciones**. Sean (X, d_X) , (Y, d_Y) dos espacios métricos y $f : X \rightarrow Y$.

- a) f es *abierta* si para todo abierto $U \subset X$ la imagen $f(U)$ es un abierto de Y .
- b) f es *cerrada* si para todo cerrado $C \subset X$ la imagen $f(C)$ es un cerrado de Y .
- c) f es una función *de Lipschitz* si existe $K > 0$ tal que $d_Y(f(x'), f(x)) \leq K d_X(x', x)$ para cualesquiera $x, x' \in X$. Las K que cumplen esto se llaman *constantes de Lipschitz* de f .
- d) Una función $f : X \rightarrow X$ que sea de Lipschitz y admita una constante de Lipschitz $K < 1$ se llama *contractiva*.
- e) f es *coerciva* si existe $\lambda > 0$ tal que $d_Y(f(x'), f(x)) \geq \lambda d_X(x', x)$ para cualesquiera $x, x' \in X$. Las λ que cumplen esto se llaman *constantes de coercividad* de f .

Problema 6. Demuestra que si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es coerciva y continua entonces es cerrada.

Indicación: Si una sucesión de imágenes $\{f(x_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ es convergente, la original $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Problema 7. Demuestra que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$ es abierta pero no cerrada.

Problema 8. Demuestra que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ es cerrada. ¿Es f abierta?

Indicación para ver que es cerrada: Si una sucesión de imágenes $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada, la original $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ también es acotada.

Problema 9. Identificando \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 , demuestra que $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^3$ es abierta.

Indicaciones: estudia primero $f|_{\mathbb{C} \setminus \{0\}}$. Después estudia f en el entorno de 0.

Problema 10. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Supongamos que f es coerciva con constante λ y g es Lipschitz con constante K . Demuestra que si $K < \lambda$ entonces $f + g$ es coerciva con constante de coercividad $\lambda - K$.

Problema 11. Sea U un abierto de \mathbb{R}^n y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable y Lipschitz de constante $C > 0$. Demuestra que $\|Df(x)\| \leq C$ para todo $x \in U$.

Indicación: Considera derivadas según un vector.

Problema 12. Sea $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase \mathcal{C}^1 y tal que existe $M > 0$ con $\|Dg(x)\| \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ (aquí $\|\cdot\|$ es la norma en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ asociada a una norma de \mathbb{R}^n). Demuestra que la función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $f(x) = (1 + M)x + g(x)$ es una biyección de \mathbb{R}^n consigo mismo.

Indicación: Demuestra que $f(\mathbb{R}^n)$ es un abierto; para ello prueba que para todo x y todo $v \neq \mathbf{0}$ es $Df(x)v \neq \mathbf{0}$ y usa el teorema de la función inversa. Después aplica los Problemas 6 y 10 y para probar que $f(\mathbb{R}^n)$ es un cerrado.

Problema 13. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ abierta y cerrada. Demuestra que es suprayectiva.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70