**Problemas de E.D.O.** (2º de Matemáticas). Curso 2015-2016.

**1.** Para cada una de las sucesiones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ siguientes, determínar (si existe) el límite puntual de la sucesión en el conjunto o conjuntos indicados, y comprobar si la convergencia es uniforme.

*a*) $f_n(x) = \exp(-n\,x^2)\,, \quad$ sobre $[-1,1]\,.$

*b*) $f_n(x) = x^{1/n}\,, \quad$ sobre $[0,1]\,.$

*c*) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$ en $[0,1-\varepsilon]$, en $[1-\varepsilon,1+\varepsilon]$, y en $[1+\varepsilon,\infty)$.

*d*) $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le n \\ x-n & \text{si } x \ge n \end{cases}$ en cada $[a,b]$ y en $\mathbb{R}$.

*e*) $f_n(x) = \dfrac{n\,x}{1+n^2\,x^2}$ en $[-1,1]$ y en $[1,\infty)$.

*f*) $f_n(x) = x^{-n}e^x$ en $(1,\infty)$.

**2.** Sea la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $[0,1]$, dada por $f_n(x) = n^2\,x\,e^{-nx^2}$

a) Estudiar la convergencia puntual y uniforme de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

b) Comprobar que a pesar de que converge puntualmente a una función integrable, y que cada $f_n$ es integrable, se tiene $\lim \int_0^1 f_n = \infty$.

**3.** Probar que la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{R}$, dada por $f_n(x) = x\,e^{-nx^2}$ converge uniformemente a 0 en $\mathbb{R}$ y que $f_n'(x)$ converge puntualmente en $\mathbb{R}$, pero que $\{f_n'\}$ no converge uniformemente en ningún intervalo que contenga a 0.

**4.** Encontrar una sucesión de funciones continuas $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converja uniformemente a $f$ en $[0,\infty)$ para las que existan los límites $\lim \int_0^\infty f_n$ y $\int_0^\infty f$ pero no coincidan.

**5.** Sea $f_n(x) = \cos^{2n}(\pi x)$ en $\mathbb{R}$.

a) Estudiar a qué función converge puntualmente la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y si la convergencia es uniforme.

b) Describir la función $\lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(k!x)$.

**6.** Sean $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de funciones dadas por $f_n(x) = x^2 + 1/n$ y $g_n(x) = (nx)^{-1}$.

a) Demostrar que ambas convergen uniformemente en $[1,\infty)$ y sin embargo la sucesión de término general $f_n g_n$ no lo hace.

b) Demostrar que a pesar de que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a una función $f$, $\{f_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ no converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a $f^2$.

**7.** Sea la sucesión de término general $f_n(x) = x/(1+n\,x^2)$. Comprobar que converge uniformemente a cierta $f$ en $\mathbb{R}$ y que se se verifica $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$ para cualquier $x \neq 0$ pero no para $x = 0$.

**8.** Encontrar una sucesión de funciones derivables en $(-1, 1)$ que converja uniformemente a $f(x) = |x|$.

**9.** Considerar la ecuación lineal

$$x' + a(t)x = 0,$$

donde $a(t)$ es una función continua y periódica de periodo $T$.

a) Demostrar que si $x(t)$ es solución, entonces $y(t) = x(t+T)$ también lo es.

b) Demostrar que existe una constante $C$ tal que $x(t+T) = Cx(t)$ para todo $t$.

c) Encontrar la condición que debe satisfacer $a(t)$ para que existan soluciones de periodo $T$, o de periodo $2T$.

d) Si $a(t)$ es constante, calcular su valor para que existan soluciones periódicas de periodo $2T$.

**10.** Sean $y_1, y_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos soluciones de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$.

a) Probar que su wronskiano $W = W(y_1, y_2)$ cumple $W' + P(x)W = 0$.

b) Deducir que o bien $W$ es idénticamente nulo o bien no se anula en ningún punto.

**11.** Comprobar que $y(x) = x^2 \operatorname{sen} x$ e $y(x) = 0$ son soluciones de

$$\begin{cases} x^2\, y'' - 4\, x\, y' + (x^2 + 6)\, y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Explicar por qué esto no contradice el teorema de unicidad de soluciones para ecuaciones lineales.

**12.** Resolver

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 0 \\ y(0) = 6,\ y'(0) = 10 \end{cases}$$

**13.** Considerar la ecuación con coeficientes constantes

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Demostrar que la solución general tiende a 0 cuando $t \to +\infty$ si y sólo si $a$ y $b$ son ambos positivos.

**14.** Resolver

$$\begin{cases} y''' - 3y'' + 3y' - y = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 3 \end{cases}$$

**15.** Sabiendo que $i-1$ es raíz del polinomio característico, calcular la solución general de

$$y^{(iv)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0.$$

**16.** Demostrar que si $a_0 \neq 0$ entonces la ecuación $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = x^k$ tiene una única solución polinómica y ésta es de grado $k$.

**17.** Hallar la solución general de $y''' - 2y'' + y' = x^2$.

**18.** Hallar una solución particular de $y'' + y = \cos(x + \alpha)$ donde $\alpha$ es una constante.

**19.** Dada la ecuación homogénea $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, hacer el cambio de variables

$$\begin{aligned} s &= \phi(t) \\ z(s) &= y(t). \end{aligned}$$

Demostrar que la ecuación se transforma en una ecuación de coeficientes constantes si y sólo si $(Q' + 2PQ)/Q^{3/2}$ es constante. Determinar el cambio de variable independiente en este caso (la función $\phi(t)$), y aplicar este método (cuando sea posible) para resolver

a) $xy'' + (x^2 - 1)y' + x^3 y = 0$.
b) $y'' + 3xy' + x^2 y = 0$.
c) $x^2 y'' + 2xy' - 12y = 0$.
d) $x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$.

**20.** Sabiendo que la función identidad es solución de $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, hallar la solución general.

**21.** Sabiendo que $x_1(t) = t^2$ es solución de

$$t^2\, x'' + t\, x' - 4\, x = 0,$$

hallar una segunda solución $x_2(t)$ linealmente independiente y la solución que verifica $x(1) = 2$, $x'(1) = 0$.

**22.** Hállese la solución general de la ecuación lineal no homogénea

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

**23.** Pruébese que el método de variación de las constantes aplicado a la ecuación

$$y'' + y = f(x),$$

conduce a la solución particular

$$y(x) = \int_0^x f(s)\,\operatorname{sen}(x-s)\,ds\,.$$

**24.** Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ soluciones de $x'' + P(t)\,x' + Q(t)\,x = 0$

a) Probar que si tienen un cero común entonces una de ellas es múltiplo constante de la otra. *Indicación*: Encontrar una combinación lineal que satisfaga las mismas condiciones iniciales que la función nula.

b) Demostrar que la misma conclusión se obtiene cuando ambas funciones tienen máximos o mínimos relativos en un mismo punto.

**25.** Si no hubiera rozamiento, una partícula de masa $m = 1$, se movería libremente en movimiento armónico simple alrededor del origen con frecuencia $\sqrt{2}/(2\pi)$ oscilaciones por segundo. Pero se ve afectada por una fuerza de rozamiento igual al doble de su velocidad. Hallar la ecuación de movimiento en términos de la posición $x_0$ y velocidad $v_0$ en el tiempo $t = 0$.

**26.** La amplitud de cierto péndulo somentido a oscilaciones forzadas responde a la ecuación

$$x'' + \epsilon x' + 4x = \operatorname{sen}(\omega t)$$

donde $\epsilon > 0$ es muy pequeño. Hallar la solución estacionaria (esto es, sin términos que tiendan a cero cuando $t \to +\infty$) para $\omega = 1$ y $\omega = 2$. Explicar en qué se manifiesta el fenómeno de la resonancia.

**27.** Sea $y_1$ una solución no trivial de $y'' + q(x)y = 0$ e $y_2$ una solución no trivial de $y'' + r(x)y = 0$, donde $q(x) > r(x) > 0$.

a) Probar que si $y_1$, $y_2$ son positivas en cierto intervalo $I$, entonces el wronskinado $W = W(y_1, y_2)$ es estrictamente creciente en dicho intervalo.

b) Probar que si una función $f \in C^1$ es positiva para $a < x < b$ y $f(a) = f(b) = 0$, entonces $f'(a) \geq 0 \geq f'(b)$.

c) Deducir el teorema de comparación de Sturm: Si $y_1$, $y_2$ son como en el enunciado, entonces $y_1$ se anula al menos una vez entre cada par de ceros consecutivos de $y_2$.

**28.** a) Sea $y_1(x) = R(x)y_2(x)$, donde

$$2R' + P(x)R = 0.$$

Comprobar que

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0$$

si y sólo si

$$y_2'' + V(x)y_2 = 0,$$

para alguna función particular $V(x)$. Calcular $R(x)$, $V(x)$ (en función de $P$ y $Q$), y comprobar que $y_1(x)$, $y_2(x)$ tienen exactamente los mismos ceros.

b) Utilizar el método anterior para calcular la solución general de

$$y'' + 2xy' + (1 + x^2)y = 0.$$

**29.** a) Demostrar que las funciones vectoriales

$$\vec{x_1}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x_2}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

son linealmente independientes sobre el eje real.

b) Calcular el determinante wronskiano $W(\vec{x_1}, \vec{x_2})$ e interpretar el resultado de acuerdo con el apartado anterior.

**30.** a) Comprobar que $\mathcal{B} = \{\cos x - \operatorname{sen} x, 2 \operatorname{sen} x\}$ es una base del espacio de soluciones de $y'' + y = 0$.

b) ¿Cuáles son las coordenadas de la solución que cumple $y(0) = y'(0) = 1$ en dicha base?

**31.** Hallar la solución del sistema

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \vec{Y}, \qquad \vec{Y}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**32.** Para el siguiente sistema, hallar una matriz fundamental $\Phi = \Phi(t)$ que cumpla $\Phi(0) = \mathrm{Id}$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

**33.** Hallar la solución de

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**34.** Resolver el sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{x}\,, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**35.** Encontrar una matriz fundamental para el sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}\,,$$

**36.** Encontrar una matriz fundamental para el sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}\,,$$

**37.** Encontrar una matriz fundamental para el sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}\,,$$

**38.** Hallar la solución general $\vec{Y} = \vec{Y}(x)$ de

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \vec{Y} + \begin{pmatrix} x-1 \\ -5x-2 \end{pmatrix}.$$

*Indicación*: Es más breve buscar una solución particular de un tipo especial, que aplicar el método de variación de las constantes.

**39.** Resolver

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \operatorname{cosec} t \\ \sec t \end{pmatrix}.$$

**40.** Hallar la solución $\vec{Y} = \vec{Y}(x)$ del sistema

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \operatorname{sen} x & -1 \end{pmatrix} \vec{Y}$$

y escribir la matriz fundamental $\Phi$ en la forma $\Phi(x) = B(x)e^{xL}$ donde $B(x)$ es una matriz cuyos elementos son funciones periódicas y $L$ es una matriz constante.