Hoja 3: dependencia lineal, rango.

1. Para cada una de las siguientes matrices, haz lo que se pide usando el método de Gauss.

a) Halla el rango r de la matriz.

b) Halla una submatriz $r \times r$ que sea invertible.

c) Da una base del espacio columna.

d) Da una base del espacio fila.

e) Halla una base del espacio nulo (por la derecha).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 7 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} i & i-1 & i-2 & 3 & -1 \\ -1+i & -2 & -3-i & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & i & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Sea A una matriz $n \times k$, con entradas en cualquier cuerpo. Demuestra que $\operatorname{rango}(A) = \operatorname{rango}(A^t)$.

3. Demuestra que en el espacio vectorial $\mathbb{V} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ es continua}\}$ cada una de las siguientes parejas $\{f(t), g(t)\}$ es linealmente independiente: $\{e^t, e^{2t}\}$, $\{\operatorname{sen} t, \cos t\}$, $\{e^t, \log(1+|t|)\}$.

4. Sean A una matriz $k \times n$ y B una matriz $n \times p$, con entradas en cualquier cuerpo.

a) Demuestra que las columnas de AB son combinaciones lineales de las de A. Demuestra que las filas de AB son combinaciones lineales de las de B. Deduce que $\operatorname{rango}(AB) \leq \operatorname{mín}\big(\operatorname{rango}(A), \operatorname{rango}(B)\big)$.

b) Deduce que una matriz **vertical** (con más filas que columnas) jamás tiene inversa por la derecha.

Halla todas las inversas por la izquierda de $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

c) Deduce que una matriz **apaisada** (con más columnas que filas) jamás tiene inversa por la izquierda.

Halla todas las inversas por la derecha de $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & 0 \end{bmatrix}$.

5. (a) Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial complejo, es decir un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Comprueba que si utilizamos la operación (escalar)vector solamente con escalares reales, eso da a $\mathbb{V}$ una estructura de espacio vectorial real.

(b) Dada una lista de vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{V}$, se pide:

1. Prueba que $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ generan $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{C}$ si y sólo si $\mathbf{v}_1, i\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, i\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, i\mathbf{v}_k$ generan $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{R}$.

2. Prueba que $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$ si y sólo si $\mathbf{v}_1, i\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, i\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, i\mathbf{v}_k$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$.

3. Deduce que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es base de $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{C}$ si y sólo si $\{\mathbf{v}_1, i\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, i\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, i\mathbf{v}_k\}$ es base de $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{R}$. Obtén la fórmula: $\boxed{\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}) = 2\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{V})}$.

4. Deduce que en $\mathbb{R}^3$ no existe ninguna estructura de espacio vectorial complejo que induzca, por el método del apartado **(a),** la estructura estándar de espacio vectorial real de $\mathbb{R}^3$.

(c) Considera los vectores $(1-i, 1), (2, 1+i) \in \mathbb{C}^2$. Comprueba si son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Comprueba si son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$.

(d) Dados vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$, considerémoslos también como vectores de $\mathbb{C}^n$. Demuestra que son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$ si y sólo si son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$. Demuestra que generan $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$ si y sólo si generan $\mathbb{C}^n$ sobre $\mathbb{C}$ (Indicación: proceso de Gauss para la matriz cuyas columnas son $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$) ¿Por qué el resultado del apartado **(c)** no contradice los de éste?