Hoja de problemas III. Teoría de Galois. 2018-2019

Ejercicio 1. *Hallar el grado y una base de cada una de las siguientes extensiones:*

$$\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)/\mathbb{Q}(\sqrt{2}).$$

Ejercicio 2. *Hallar los polinomios irreducibles en* $\mathbb{Q}[x]$ *de* i, $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $\frac{i\sqrt{3}-1}{2}$ *y* $\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

Ejercicio 3. *Hallar los grados de las siguientes extensiones de cuerpos.*

(i) $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{3})/\mathbb{Q}$.

(ii) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$.

(iii) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, i)/\mathbb{Q}$.

(iv) $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})/\mathbb{Q}$.

Ejercicio 4. *Demostrar que* $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. *Hallar un polinomio irreducible de* $\mathbb{Q}[x]$ *de grado 4 que tenga una raíz en* $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Ejercicio 5. *Sea* α *algebraico sobre el cuerpo* K. *Demostrar que su polinomio mínimo es irreducible en* $K[x]$ *y que divide a cualquier otro polinomio de* $K[x]$ *del que* α *sea una raíz.*

Ejercicio 6. *Calcular el polinomio mínimo de* $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}-1$.

Ejercicio 7. *Estudiar cuáles de los siguientes subcuerpos de* $\mathbb{C}$ *coinciden:*

$$\mathbb{Q}(i, \sqrt{2}), \mathbb{Q}(\sqrt{-2}), \mathbb{Q}(\sqrt{2}+i), \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{1+\sqrt{2}}), \mathbb{Q}(\sqrt{1+\sqrt{2}}).$$

Ejercicio 8. *Demostrar que* $x \in \mathbb{Q}(x)$ *es algebraico sobre* $\mathbb{Q}(\frac{x}{x^2+1})$.

Ejercicio 9. *1. Demostrar que si* F/K *es una extensión de grado primo, entonces los únicos subcuerpos intermedios* $K \subseteq E \subseteq F$ *son* $E = K$ *y* $E = F$.

2. Demostrar que una extensión de grado primo es simple (está generada por un elemento).

3. Si $K(\alpha)/K$ *es una extensión de grado 3, calcular* $K(\alpha^2)/K$.

4. Suponiendo que el polinomio mínimo de α *es* x^3+x-1, *hallar el polinomio mínimo de* α^2.

Ejercicio 10. *Sea* F/K *una extensión finita y* $f \in K[x]$ *un polinomio irreducible. Demostrar que si* f *tiene una raíz en* F, *entonces el grado de* f *es divisor de* $|F : K|$.

Ejercicio 11. *Sea* F/K *una extensión de cuerpos y* E_1 *y* E_2 *subcuerpos intermedios tales que* E_1/K *y* E_2/K *son extensiones finitas de grados primos entre sí. Demostrar que* $E_1 \cap E_2 = K$.

Ejercicio 12. *Decidir si es verdadero o falso:*

(I) *Sea E/K una extensión y supongamos que $a, b \in E$ son algebraicos sobre K. Si existe un isomorfismo de cuerpos $\theta : K(a) \to K(b)$ tal que $\theta(a) = b$, entonces existe un polinomio irreducible p en $K[x]$ tal que $p(a) = p(b) = 0$.*

(II) *Sea E/K una extensión y supongamos que $a, b \in E$ son algebraicos sobre K. Si existe un isomorfismo de cuerpos $\theta : K(a) \to K(b)$ tal que $\theta(a) = b$ y $\theta(k) = k$ para todo $k \in K$, entonces existe un polinomio irreducible p en $K[x]$ tal que $p(a) = p(b) = 0$.*

(III) *Sea E/K una extensión y supongamos que $a, b \in E$ son algebraicos sobre K. Si $K(a) = K(b)$ entonces existe un polinomio irreducible p en $K[x]$ tal que $p(a) = p(b) = 0$.*

(IV) *Sea K un cuerpo y P un polinomio sobre K. Entonces existe una extensión de K donde P tiene al menos una raíz.*

(V) *Sea K un cuerpo y P un polinomio sobre K. Entonces existe una extensión de K donde P se descompone como un producto de polinomios de grado 1.*

(VI) *Sea F/K una extensión finita y $f \in K[x]$ un polinomio irreducible. Si f tiene una raíz en F, entonces el grado de f es igual a $|F : K|$.*

(VII) *Sea F/K una extensión finita y $f \in K[x]$ un polinomio irreducible. Si f tiene una raíz en F, entonces el grado de f divide a $|F : K|$.*

Ejercicio 13.

(I) *Sea α algebraico sobre el cuerpo K y E una extensión de K . Demostrar que el polinomio mínimo de α sobre K divide al polinomio mínimo de α sobre E.*

(II) *Sea F/K una extensión finita de cuerpos y E un subcuerpo intermedio. Demostrar que si $u \in F$, entonces $|E(u) : E| \leq |K(u) : K|$.*

Ejercicio 14. *Sea F/K una extensión de cuerpos y $u, v \in F$ dos elementos con $|K(u) : K| = n$ y $|K(v) : K| = m$. Demostrar que $|K(u, v) : K| \leq nm$. Demostrar que si n y m son coprimos, entonces $|K(u, v) : K| = nm$.*

Ejercicio 15. *Sea F/K una extensión de cuerpos y $P = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in F[x]$ con los a_i elementos algebraicos sobre K. Demostrar que si $u \in F$ es una raíz de P, entonces u es algebraico sobre K. (Ayuda: considerar subcuerpo intermedio $E = K(a_0, \cdots, a_n)$.)*

Ejercicio 16. *Sea E_1/K_1 una extensión finita y sea $\sigma : E_1 \to E_2$ un isomorfismo de cuerpos. Si $\sigma(K_1) = K_2$, probar que*

$$|E_1 : K_1| = |E_2 : K_2|.$$

Ejercicio 17. *Supongamos que E/K es una extensión y sean $a_1, \dots, a_n$ elementos de E. Sea $\sigma : E \to L$ un isomorfismo de cuerpos. Probar que*

$$\sigma(K(a_1, \dots, a_n)) = \sigma(K)(\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_n)).$$

Ejercicio 18. *Diseñar un método para dividir con regla y compás un segmento dado en* 5 *partes iguales.*

Ejercicio 19. *Diseñar un método para construir con regla y compás un cuadrado cuya área es igual al área de un rectángulo dado. (*Ayuda: *podeis usar la fórmula $(a+b)^2 = (a-b)^2 + (2\sqrt{ab})^2$.)*

Ejercicio 20. *Diseñar un método para construir con regla y compás un triángulo equilátero cuya área es igual al área de un triángulo dado. (*Ayuda. *Usar la fórmula de Heron para el área de un triángulo: sean a,b y c los lados de un triángulo y sea p la mitad del perímetro de este triángulo; entonces su are es igual a $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.)*

Ejercicio 21. *(*) 1. Sea K un cuerpo y supongamos que K es un subanillo de un dominio de integridad R. Demostrar que si R, como K-espacio vectorial, es de dimensión finita, entonces R es un cuerpo.*

2. Sea R un dominio de integridad y $P \in R[x]$ es un polinomio de grado n. Demostrar que existen como máximo n elementos r de R tales que $P(r) = 0$.

Ejercicio 22. *(*)*

1. Supongamos que E/K es una extensión de cuerpos con K infinito. Supongamos que $E = K(a, b)$ para ciertos $a, b \in E$. Si sólo existe un número finito de subcuerpos intermedios $K \subseteq F \subseteq E$, probar que E/K es simple.

2. Supongamos que E/K es finita. Si K es finito, probar que E/K es simple.

3. Supongamos que E/K es finita. Probar que E/K es simple si y sólo si sólo existe un número finito de subcuerpos entre K y E.