Hoja 4: suma de subespacios, aplicaciones lineales.

1. Fijado un cuerpo $\mathbb{K}$, sean $V_1, \ldots, V_k$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$.

(a) Considera el producto cartesiano $V_1 \times V_2$ y en él las operaciones de suma y producto por escalar, definidas de la manera siguiente: si $v_1, v_1' \in V_1$, $v_2, v_2' \in V_2$ y $a \in \mathbb{K}$, entonces

$$(v_1, v_2) + (v_1', v_2') \stackrel{\text{def}}{=} (\, v_1 + v_1' \,,\, v_2 + v_2' \,) \quad , \quad a\,(v_1, v_2) \stackrel{\text{def}}{=} (\, av_1 \,,\, av_2 \,) \,,$$

Demuestra que estas operaciones dan a $V_1 \times V_2$ una estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, que llamamos **espacio vectorial producto.**

(b) Identifica el espacio vectorial producto $\mathbb{K}^{n_1} \times \mathbb{K}^{n_2}$ con $\mathbb{K}^{n_1+n_2}$.

(c) Da, de manera análoga, la definición del producto $V_1 \times \cdots \times V_k$ de varios espacios vectoriales y demuestra la siguiente "asociatividad":

$$(V_1 \times \cdots \times V_s) \times (V_{s+1} \times \cdots \times V_k) \;=\; V_1 \times \cdots \times V_k \text{ como espacios vectoriales.}$$

(d) Identifica el espacio vectorial $\mathbb{K}^n$ con $\underbrace{\mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}}_{n \text{ factores}}$.

(e) Demuestra que si para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$ tenemos un subespacio vectorial $W_j \subseteq V_j$, entonces $W_1 \times \cdots \times W_k$ es un subespacio vectorial de $V_1 \times \cdots \times V_k$.

(f) Demuestra que $V_1 \times V_2 = \big(V_1 \times \{\mathbf{0}\}\big) \oplus \big(\{\mathbf{0}\} \times V_2\big)$ y que $\dim(V_1 \times \cdots \times V_k) = \dim V_1 + \cdots + \dim V_k$.

2. Fijamos un entero positivo n y un cuerpo $\mathbb{K}$. Sea $\mathbb{M}_1 \subset \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ el conjunto de las matrices **simétricas** (las que cumplen $A^t = A$) y $\mathbb{M}_2 \subset \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ el de las **antisimétricas** (las que cumplen $A^t + A = 0$).

a) Demuestra que $\mathbb{M}_1$ y $\mathbb{M}_2$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{M}$.

b) Para $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, demuestra que $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) = \mathbb{M}_1 \oplus \mathbb{M}_2$. (Puede ayudar hacerlo primero para $n = 2$ y luego para $n = 3$).

c) Para $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, halla $d_1 = \dim \mathbb{M}_1$, $d_2 = \dim \mathbb{M}_2$, y comprueba que $d_1 + d_2 = \dim \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

d) Para $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$, el cuerpo de dos elementos, comprueba que ahora la suma $\mathbb{M}_1 + \mathbb{M}_2$ no es directa ni es igual a $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F}_2)$. ¿Cuáles son las causas?

3. Consideramos el espacio vectorial $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ de los polinomios reales de grado a lo más 3.

(a) ¿Cuál es la dimensión de V?

(b) Halla un complementario, generado por monomios x^k, del siguiente subespacio vectorial de V:

$$W \;=\; \left\langle\; x^3 + x^2 + x - 1 \;\;,\;\; -x^3 + x^2 \;\;,\;\; 2x^3 + 2x^2 - 2 \;\;,\;\; 3x^3 + x^2 + 3x - 2 \;\right\rangle .$$

4. Sea λ un núnero real. Considera la siguiente suma de subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -\lambda \end{bmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \lambda \\ \lambda \end{bmatrix} \right\rangle .$$

¿Para qué valores de λ es una suma directa? ¿Para cuáles no lo es?

5. Consideremos en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales $W_1 =< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 >$ y $W_2 =< \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5 >$, con

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, -1, 3),\; \mathbf{v}_2 = (0, 2, 1, -1),\; \mathbf{v}_3 = (-2, 6, 3, -7),\; \mathbf{v}_4 = (1, -2, -2, 0),\; \mathbf{v}_5 = (2, 0, -1, 1)\,.$$

a) Halla una base de cada uno de los siguientes espacios: W_1 , W_2 , $W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2$.

b) Comprueba que se verifica la fórmula de Grassmann.

c) Mismas cuestiones cambiando $\mathbf{v}_5$ por $(2, 0, -1, 0)$.

6. Para cada una de las aplicaciones siguientes decide, razonadamente, si es lineal o no.

i) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad F(x,y) = (2x+3y, -5x)$.

ii) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad F(x,y) = (2+3y, x+y)$.

iii) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad F(x,y) = (x, y^2)$.

iv) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad , \quad F(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$.

v) $\{\text{funciones } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathbb{R} \quad , \quad \mathcal{F}\big[f(x)\big] = f(7'5)$.

vi) $\{\text{funciones acotadas } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathbb{R} \quad , \quad \mathcal{F}\big[f(x)\big] = \sup f(x)$.

vii) $\{\text{funciones } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} \xrightarrow{T} \{\text{funciones } g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} \quad , \quad T\big[f(x)\big] = f(\cos x)$.

viii) $\{\text{funciones } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} \xrightarrow{T} \{\text{funciones } g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} \quad , \quad T\big[f(x)\big] = \cos\big(f(x)\big)$.

ix) $F : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x] \quad , \quad F\big(p(x)\big) = p(x+1)$.

x) $F : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x] \quad , \quad F\big(p(x)\big) = p(x)+1$.

xi) $F : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x] \quad , \quad F\big(p(x)\big) = 2\,p(x) - (1+x^2)\,p'(x)$.

xii) $\mathcal{F} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R} \quad , \quad \mathcal{F}\big(p(x)\big) = \displaystyle\int_{-1}^{2} p(x)\,dx$.

xiii) $T : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x] \quad , \quad T\big(p(x)\big) = \displaystyle\int_{0}^{x} p(\xi)\,d\xi$.

xiv) $F : \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \quad , \quad F(A) = A^t$.

xv) $F : \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \quad , \quad F(A) = \det A$.

xvi) $F : \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \quad , \quad F(A) = I_2 + A$.

xvii) $F : \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \quad , \quad F(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

7. De una función lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sabemos que $f(1,0,0) = -1$, $f(2,1,0) = 5$ y $f(3,4,1) = 7$. Sabiendo eso, determina $f(3,5,-1)$.

8. Dados conjuntos X, Y y una aplicación $f : X \to Y$, el **grafo de f** es el siguiente subconjunto del producto cartesiano:

$$\big(\text{grafo de } f\big) \stackrel{\text{def}}{=} \big\{\, \big(\, x \,,\, f(x) \,\big) \,:\, x \in X \,\big\} \subseteq X \times Y \,.$$

a) Explica cómo recuperar f a partir de su grafo.

b) Si V, W son espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo, demuestra que $f : V \to W$ es lineal si y sólo si su grafo es un subespacio vectorial del espacio vectorial producto $V \times W$.

c) Todo subespacio vectorial de $V \times W$ tiene que pasar por el origen $(\vec{0}_V, \vec{0}_W)$. ¿Cómo afecta esto a las aplicaciones lineales $f : V \to W$?