Hoja de problemas IV. Teoría de Galois. 2018-2019

Ejercicio 1.

(I) *Sean* $f(x) = (x^2 - 3)(x^3 + 1) \in \mathbb{Q}[x]$ *y* $g(x) = (x^2 - 2x - 2)(x^2 + 1) \in \mathbb{Q}[x]$. *Probar que* $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$ *es cuerpo de descomposición de* f *y* g *sobre* $\mathbb{Q}$.

(II) *Demostrar que* $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ *es un cuerpo de descomposición de* $x^2 - 2\sqrt{2}x + 3$ *sobre* $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

(III) *Construir cuerpos de descomposición sobre* $\mathbb{Q}$ *de los polinomios* $x^3 - 1$, $x^4 + 5x^2 + 5$ *y* $x^6 - 8$ *y calcular el grado de la extensión correspondiente.*

Ejercicio 2. *Demostrar que* $K = \mathbb{F}_2[y]/(y^3 + y + 1)$ *es el cuerpo de descomposición de* $x^3 + x + 1$ *y* $x^3 + x^2 + 1$ *sobre* $\mathbb{F}_2$.

Ejercicio 3.

(I) *Decidir si las siguientes extensiones son normales*

$$\mathbb{Q}(\sqrt{5}i)/\mathbb{Q}, \ \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})/\mathbb{Q}.$$

(II) *Demostrar que* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ *no es una extensión normal de* $\mathbb{Q}$. *Encontrar una extensión normal de* $\mathbb{Q}$ *que contenga a* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ *como un subcuerpo.*

(III) *Demostrar que* $\mathbb{Q}(\xi)$, *donde* $\xi = e^{\frac{2\pi i}{5}}$, *es una extensión normal de* $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 4. *Decide razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.*

(I) *Supongamos que* $f \in K[x]$ *se descompone en* $K[x]$ *y supongamos que* $p \in K[x]$ *no es constante y* $p \mid f$. *Entonces* p *se descompone en* $K[x]$.

(II) *Supongamos que* $K \subseteq L \subseteq E$ *son extensiones de cuerpos. Sea* $f \in K[x]$ *no constante. Si* E *es cuerpo de descomposición de* f *sobre* K, *entonces* E *es cuerpo de descomposición de* f *sobre* L.

(III) *Si* $E = K(a_1, \ldots, a_n)$ *y* σ *es un* K*-automorfismo de* E *tal que* $\sigma(a_i) = a_i$ *para todo* i, *entonces* $\sigma = 1_E$.

(IV) *Toda extensión de grado 2 es normal.*

(V) *Si* E/L *y* L/K *son normales, entonces* E/K *es normal.*

Ejercicio 5. *Supongamos que* K *es un cuerpo de característica* p *y sea* $a \in K$. *Probar que el polinomio* $p(x) = x^p - x - a$ *se descompone en factores lineales en* $K[x]$ *o es irreducible.*

Ejercicio 6. *Sea* $F = \mathbb{F}_2[x]/(x^2 + x + 1)$. *Probar que* $F/\mathbb{F}_2$ *es separable.*

Ejercicio 7. *Probar que* $\mathbb{F}_2(x)/\mathbb{F}_2(x^2)$ *no es separable.*

Ejercicio 8. *Sea K un cuerpo y $f(x)$ un polinomio de grado n en $K[x]$. Demostrar que si F es el cuerpo de descomposición de f sobre K, el grado de la extensión F/K es menor o igual que el factorial de n.*

Ejercicio 9. *Calcular el grupo de Galois de la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$.*

Ejercicio 10. *Encontrar el grupo de Galois de la menor extensión normal de $\mathbb{Q}$ conteniendo a $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$.*

Ejercicio 11. *Hallar el grupo de Galois de los siguientes polinomios sobre $\mathbb{Q}$ (el grupo de Galois de un polinomio $p \in K[x]$ es el grupo de Galois del cuerpo de descomposición de p sobre K):*

$$x^{12} - 1,\ x^4 - 2,\ x^4 + x^2 - 6,\ (x^3 - 2)(x^2 - 2).$$

Ejercicio 12. *Si p es un primo, hallar el grupo de Galois del polinomio $f(x) = x^p - 1 \in \mathbb{Q}[x]$.*

Ejercicio 13. *Probar que la extensión $\mathbb{C}(x)/\mathbb{C}(x^6)$ es normal y calcular su grupo de Galois.*

Ejercicio 14. *Sea E una extensión de $\mathbb{F}_p$ tal que $[E : \mathbb{F}_p] = n$. Como E^* es un grupo cíclico y tiene como generador digamos θ, sabemos que $E = \mathbb{F}_p(\theta)$. Sea $\phi : E \to E$ dada por $\phi(x) = x^p$. Demostrar que $\{1,\ \phi,\ \phi^2, \ldots, \phi^{n-1}\}$ son automorfismos distintos de E dejando $\mathbb{F}_p$ fijo y concluir que E es una extensión de Galois de $\mathbb{F}_p$ con el grupo de Galois $Gal(E/\mathbb{F}_p) = \{1,\ \phi, \ldots, \phi^{n-1}\}$.*

Ejercicio 15.

(I) *Sea $P = x^q - x \in \mathbb{F}_p[x]$ con $q = p^n$. Demostrar que cualquier polinomio irreducible en $\mathbb{F}_p[x]$ de grado n divide a P.*

(II) *Probar que todos los factores irreducibles de $x^q - x \in \mathbb{F}_p[x]$ con $q = p^n$, son de grado menor o igual que n.*

Ejercicio 16. *¿Cuántas raíces distintas tiene $x^{12} + 2x^6 + 1 \in \mathbb{F}_3[x]$ en su cuerpo de descomposición?*

Ejercicio 17. ✠

Sea K un cuerpo infinito, $F = K(a, b)$ una extensión separable algebraica y $f = \mathrm{Irr}(a, K)$ y $h = \mathrm{Irr}(b, K)$.

1. Demostrar que existe $\alpha \in K \setminus \{0\}$ tal que el sistema

$$h(\alpha^{-1}(x - a) + b) = 0, \quad f(x) = 0$$

tiene sólo una solución $x = a$.

2. Sea α del apartado anterior. Pongamos $u = a - \alpha b$ y $g = h(\alpha^{-1}(x - a) + b)$. Demostrar que $(f, g) = (x - a)$. Deducir de aquí que $a \in K(u)$ y $K(u) = K(a, b)$.

3. Sea E/K una extensión finita de característica cero. Probar que existe $u \in E$ tal que $E = K(u)$.