5. Convergencia, Numerabilidad y Separación

Número 1. Se considera en la recta $\mathbb{R}$ la topología $\mathcal{T}_{\text{CF}}$ de los complementarios finitos.

(1) Estudiar si converge la sucesión $(n)_{n\geq 1}$, y a qué puntos.

(2) Lo mismo para las sucesiones $1,2,3,1,4,5,1,6,7,1,\dots$ y $1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,\dots$

(3) Dar una regla para saber cuándo una sucesión converge en este espacio, y a qué puntos.

Número 2. En $X=(-1,1)$ se considera la topología $\mathcal{T}$ cuyos cerrados ($\neq \emptyset, X$) son los intervalos $[a,b]$ con $-1<a\leq 0\leq b<1$ (notad que a y b pueden ser iguales). Se pide:

(1) Encontrar una sucesión que converja a todos los puntos del espacio, y un punto al que converjan todas las sucesiones. Mostrar que ese punto es único, y encontrar una sucesión que solo converja a ese punto.

(2) ¿Existe una sucesión que converja (resp. no converja) en la topología usual y que no lo haga (resp. sí lo haga) en esta topología $\mathcal{T}$?

(3) Estudiar las propiedades de numerabilidad de este espacio topológico.

Número 3. Sea $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ una biyección. Consideremos en $(\mathbb{R},\tau_u)$ la sucesión determinada por φ. Calcular los valores de adherencia de dicha sucesión. ¿Es convergente?

Número 4. Sea $\mathcal{T}$ la topología en $\mathbb{R}$ cuyos abiertos no vacíos son los subconjuntos $U\subset\mathbb{R}$ que contienen todos los números enteros $k\geq 1$ (esto es, $1,2,3,\ldots\in U$) (ver 2.18). Describir las sucesiones convergentes en este espacio y sus límites.

Número 5. Probar que las aplicaciones continuas transforman sucesiones convergentes en sucesiones convergentes. Dar un ejemplo que muestre que el recíproco no es cierto en general.

Número 6. Demostrar que una sucesión en un espacio producto es convergente si, y sólo si, son convergentes las correspondientes sucesiones coordenadas.

Número 7. Probar que si una sucesión es convergente entonces todas sus subsucesiones también lo son. Mostrar con un ejemplo que no existe un resultado análogo para los valores de adherencia.

Número 8. Probar que en un espacio métrico, si una sucesión es convergente entonces sólo tiene un valor de adherencia. Mostrar con un ejemplo que el recíproco no es necesariamente cierto.

Número 9. Sea (X,d) un espacio métrico. Probar que la sucesión $(x_n)_n\to x$ en la topología de la métrica si, y sólo si, la sucesión $(d(x_n,x))_n\to 0$ en $\mathbb{R}$ con al topología usual.

Número 10. Se considera en $\mathbb{R}^2$ la topología generada por los conjuntos $G=B\setminus A$, donde B es una bola abierta usual y A un conjunto numerable. Estudiar para esta topología:

Número 13. Estudiar los axiomas de numerabilidad de $\mathbb{R}$ con cada una de estas topologías:

(1) La generada por los intervalos semiabiertos $[a, b)$.

(2) La generada por los rayos $[a, \rightarrow)$.

Número 14. Estudiar las propiedades de numerabilidad del plano $\mathbb{R}^2$ equipado con la topología $\mathcal{T}$ definida en 2.15.

Número 15. Se equipa $\mathbb{R}$ con la topología descrita por las siguientes bases de entornos:

(i) Para los puntos $a \neq 0$ los intervalos abiertos centrados en a, y

(ii) Para $a = 0$ los conjuntos

$$(\leftarrow, -n) \cup (-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}) \cup (n, \rightarrow), \quad n \geq 1.$$

Estudiar los axiomas de numerabilidad de este espacio topológico.

Número 16. Probar que en un espacio metrizable el 2º axioma de numerabilidad, la separabilidad y ser Lindelöf son propiedades equivalentes (Theorem 16.11, Willard).

Número 17. Se consideran en $\mathbb{R}^2$ las topologías $\mathcal{T}_D$, $\mathcal{T}_\delta$ y $\mathcal{T}_\rho$ asociadas a las métricas definidas en 1.15. Demostrar que ninguna de ellas cumple el 2º axioma de numerabilidad.

Número 18. Estudiar los axiomas de numerabilidad del plano $\mathbb{R}^2$ equipado con la topología generada por la familia $\mathcal{B}$ de todos los subconjuntos:

$$V(a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq a,\ y \leq b\}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Número 19. Estudiar si el plano $\mathbb{R}^2$ con la topología $\mathcal{T}$ de 2.19 es un espacio de Lindelöf.

Número 20. Definir en $\mathbb{R}$ una topología que no sea Kolmogoroff ($= T_0$). Hágase de manera que difiera de la usual sólo en los entornos de dos puntos, que sean los únicos que no puedan separarse entre sí.

Número 21. Mostrar con un ejemplo que una topología de Fréchet ($= T_1$) puede no ser Hausdorff ($= T_2$).

Número 22. Probar que un espacio es T_1 si, y sólo si, cada punto es la intersección de todos sus entornos.

Número 23. Probar que un espacio es T_2 si, y sólo si, cada punto es la intersección de todos sus entornos cerrados.

Número 24. Se equipa $\mathbb{R}$ con la topología cofinita $\mathcal{T}_{\mathrm{CF}}$. Estudiar las propiedades de separación de este espacio.

Número 25. Se considera la aplicació $\mathbb{R} \to \mathbb{Z} : x \mapsto [x] =$ parte entera de x. Se equipa a $\mathbb{R}$ con la topología usual y a $\mathbb{Z}$ con la mayor topología que haga continua dicha aplicación.