Hoja 6: aplicaciones lineales, cambio de base, espacio cociente.

1. Sea E un espacio vectorial y $V, W \subset E$ dos subespacios vectoriales. Comprueba que la aplicación

$$V \times W \longrightarrow E \quad , \quad (v,w) \longmapsto v + w \ ,$$

Es lineal. Deduce la fórmula de Grassmann como un caso particular de la fórmula para rango + nulidad.

2. Sean $\mathbb{K}$ un cuerpo y V, W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$. Si $V \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} W$ son lineales, demuestra que:

(a) $\ker f \cap \ker g \subset \ker(f+g)$.

(b) Si $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{\mathbf{0}\}$, entonces $\ker f \cap \ker g = \ker(f+g)$.

3. En $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases

$$\mathcal{B}_1 = \{ (1,0,1), (-1,1,1), (1,-1,0) \} \quad , \quad \mathcal{B}_2 = \{ (2,1,1), (1,1,1), (1,-1,1) \} .$$

(a) Calcula la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ (es decir, la matriz de $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ usando $\mathcal{B}_1$ en salida y $\mathcal{B}_2$ en llegada).
(b) Calcula las coordenadas en la base $\mathcal{B}_2$ del vector cuyas coordenadas en la base $\mathcal{B}_1$ son $(3,-2,1)$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$.

a) Determina la matriz A de f usando la base estándar en salida y en llegada.

b) Determina la matriz M de f usando la base $\mathcal{B} = \{ (1,1,0), (2,3,-1), (0,0,1) \}$ en salida y en llegada.

c) Encuentra la matriz anterior transformando la igualdad $AP = PM$ en un sistema lineal simultáneo cuyos coeficientes son las entradas de M

5. Sean $V_1, V_2 \subset V$ dos subespacios vectoriales de V que son complementarios mutuos: $V = V_1 \oplus V_2$. Definimos una aplicación $T : V \to V$ de la manera siguiente:

$$\boxed{\text{Dado } u \in V, \text{ hay } v_1 \in V_1 \text{ y } v_2 \in V_2 \text{ únicos tales que } u = v_1 + v_2, \text{ entonces hacemos } T(u) \stackrel{\text{def}}{=} v_1.}$$

Llamamos a T la *proyección de V sobre V_1 en la dirección de V_2.*

(a) Demuestra que T es lineal. Halla su imagen y su núcleo. Demuestra que $T \circ T = T$.

(b) Halla la matriz de T en una base $\{w_1, \ldots, w_{n+r}\}$, resultado de tomar una base $\{w_1, \ldots, w_n\}$ de V_1 y poner a continuación una base $\{w_{n+1}, \ldots, w_{n+r}\}$ de V_2.

(c) Sean $V = \mathbb{R}^2$ y $u = (2,1)$. Proyecta u sobre el eje $\langle \mathbf{e}_1 \rangle$ de abscisas en la dirección del eje $\langle \mathbf{e}_2 \rangle$ de ordenadas. Proyecta u sobre el eje de abscisas en la dirección de la recta $\langle (1,3) \rangle$. Haz un dibujo.

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, con $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}$.

a) Halla, si es posible, una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que la matriz de f respecto de $\mathcal{B}$ en salida y llegada sea $M = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Misma pregunta con $M = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y con $M = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

b) Determina una igualdad $A = P \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} Q$, con P y Q inversas mutuas. Usa esta igualdad para hallar una raíz cuadrada de A, es decir una matriz R tal que $RR = A$.

7. Utiliza el método de Gauss para discutir los siguientes sistemas. Para los que sean compatibles, describe el conjunto de las soluciones como un **subespacio afín;** es decir, da la solución general como (solución particular) + (elemento general del núcleo).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 16 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} i & 1 & -1 \\ -1 & 2i & 2i \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ -i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & 1 & -1 \\ -1 & 2i & 2i \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & -6 \\ 3 & -6 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & -6 \\ 3 & -6 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 6 & -6 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 6 & -6 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 6 & -6 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 9 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 9 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

8. Sean V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $F \subseteq V$ un subespacio vectorial. Decimos que los vectores $v_1, v_2, ..., v_k \in V$ son **linealmente independientes módulo F** si cumplen lo siguiente:

$$\text{para cualesquiera } x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{K} \quad , \quad x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_k v_k \in F \implies x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0 \, .$$

a) Sea $F = \langle (1,2,-1) \rangle \subset \mathbb{R}^3$. ¿Son $(1,1,0)$ y $(0,1,1)$ linealmente independientes módulo F? Misma pregunta para $(3,7,-1)$ y $(1,4,3)$.

b) Demuestra que las condiciones siguientes son equivalentes:

   (i) $v_1, v_2, \ldots, v_k$ son linealmente independientes módulo F.

   (ii) $v_1 + F$, $v_2 + F$, ..., $v_k + F$ son vectores de V/F linealmente independientes.

   (iii) $v_1, v_2, \ldots, v_k$ son linealmente independientes y además $F \cap \langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \{\mathbf{0}\}$.

c) En el caso $V = \mathbb{R}^2$ y $F = \langle (1,2) \rangle$, da un ejemplo de dos vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ que sean linealmente independientes mientras que $\mathbf{v}_1 + F$, $\mathbf{v}_2 + F \in V/F$ son linealmente dependientes.

d) Dados $v_1, \ldots, v_k \in V$ cualesquiera, demuestra que:

$$V/F = \Big\langle v_1 + F, v_2 + F, \ldots, v_k + F \Big\rangle \iff V = F + \langle v_1, \ldots, v_k \rangle \, .$$

e) Concluye lo siguiente:

$$\boxed{\begin{array}{c} \{v_1 + F, v_2 + F, \ldots, v_k + F\} \text{ es una base de } V/F \text{ si y sólo si} \\ \{v_1, \ldots, v_k\} \text{ es base de algún complementario de } F \text{ en } V \end{array}}$$

f) Explica por qué *todos* los complementarios de F en V tienen dimensión igual a la de V/F. Este número se llama **codimensión de F en V.**

9. Sea $W = \langle\, (1,0,1,1)\, , \, (0,2,-1,0)\, \rangle \subset \mathbb{R}^4$. Utiliza el método de Gauss para hallar el rango de la siguiente lista de vectores de $\mathbb{R}^4/W$:

$$(2,1,1,0) + W \ , \ (1,1,1,3) + W \ , \ (0,0,1,4) + W \ .$$

10. Sea F el subespacio de $E = \mathbb{R}^4$ definido por

$$F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{c} x + y = 0 \\ z + t = 0 \end{array} \right\}.$$

(i) Encuentra una base de F, complétala para obtener una de E y utiliza esta última para calcular una base de E/F.

(ii) Encuentra las cordenadas de los vectores $[(2,-2,0,0)], [(3,4,0,0)] \in E/F$ en la base de E/F hallada en el apartado anterior.

11. Consideramos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ -4 & -2 & 1 & 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Utiliza el método de Gauss para hallar una base de $\operatorname{Im} f$ y una de $\ker f$.

b) Extiende la base de $\ker f$ a una de $\mathbb{R}^6$, añadiendo vectores de la base estándar.

c) Utiliza el resultado para dar una base del espacio cociente $\mathbb{R}^6/\ker f$.

12. Sean V, W, espacios vectoriales, $F \subseteq V$ un subespacio vectorial y $f : V \to W$ una función lineal. Demuestra que si $F \subseteq \ker f$ entonces la fórmula $g(v + F) = f(v)$ define correctamente una aplicación $g : V/F \to W$ y que esta g así definida es lineal.

13. Sea $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ el cuerpo de dos elementos. Considera el espacio vectorial numérico $V = \mathbb{F}_2^4$.

a) Halla el cardinal de V, es decir, el número de elementos que tiene V.

b) Halla el número de pares ordenados $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ de vectores de V linealmente independientes.

c) Da la lista completa de las matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{F}_2$. Utiliza este resultado y el del apartado anterior para hallar el número de subespacios vectoriales bidimensionales que hay en V.

d) Si W es un subespacio bidimensional de V ¿cuántos subespacios afines paralelos a W hay en V? (Indicación: considera V/W) ¿Cuántos subespacios afines bidimensionales tiene V en total?

e) Explica por qué cada subespacio afín bidimensional de V tiene cuatro elementos ¿Cuántos subconjuntos de cuatro elementos tiene V? ¿Son especiales los subespacios afines? ¿Y los subespacios vectoriales?