ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 8. ISOMETRÍAS O MOVIMIENTOS I.

1. Encuentra la expresión analítica de las siguientes isometrías:
a) La simetría deslizante de eje paralelo a la recta $2x + y = 3$ y que transforma $(2, 1)$ en $(1, 0)$.
b) El giro de ángulo $\pi/3$ que lleva $(2, 1)$ en $(1, 0)$.

2. Encuentra la expresión analítica de las siguientes isometrías de $\mathbb{R}^3$:
a) La reflexión o simetría respecto al plano $3x - y + 2z = 1$.
b) La rotación helicoidal respecto al eje $\langle(1, -1, 0)\rangle$, con ángulo π y vector de traslación $(2, -2, 0)$.
c) La composición de la isometría del apartado a) con la del apartado b).

3. a) Determina las ecuaciones (respecto del sistema de referencia canónico de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$) de la simetría axial con respecto a la recta $y + x = 1$.
b) Determina las ecuaciones (respecto del sistema de referencia canónico de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$) del movimiento helicoidal de eje la recta $x = y = z$, ángulo de rotación $\theta = \pi$ y vector de traslación $\vec{v} = (3, 3, 3)$.

4. Considera la familia de afinidades de $A^2_{\mathbb{R}}$ dadas por las ecuaciones (con respecto a un sistema de referencia canónico):

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cy + a \\ x + b \end{pmatrix}.$$

Determina los valores de los parámetros a, b y c para los que estas afinidades son movimientos y calcula sus elementos geométricos.

5. Estudia las siguientes isometrías del plano:

$$\begin{cases} x' = -2 + \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y. \end{cases}$$

6. Estudia las siguientes isometrías de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x' = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}z \\ y' = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}z \\ z' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}z \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = 1 + y \\ y' = 1 - z \\ z' = -x \end{cases}$$

7. Sea $f : \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} \to \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ la afinidad cuyas ecuaciones respecto al sistema de referencia ortonormal $\mathcal{R} = \{\mathcal{O}; e_1, e_2, e_3\}$ son

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

a) Demuestra que f es una isometría (movimiento).
b) Decide de manera razonada si f preserva o invierte la orientación.
c) ¿Tiene f puntos fijos?
d) Clasifica la isometría y describe sus elementos geométricos.