PROBLEMAS DE ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA.
HOJA 2.

1. Comprobar que la ecuación de Laplace en coordenadas polares es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

2. Usando el ejercicio anterior, comprobar que $\log|z|$ es armónica en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, pero no tiene ninguna conjugada armónica en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

3. Demostrar que si $z, w \in \mathbb{C}$ y la función $(-\pi, \pi] \ni \theta \mapsto \mathrm{Arg}(z + we^{i\theta})$ es constante, entonces $w = 0$.

4. Hallar una aplicación conforme de la banda horizontal $\{z \in \mathbb{C} : -\alpha < \mathrm{Im} z < \alpha\}$ en el semiplano de la derecha $\{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z > 0\}$.

5. Sean $\{a_n\}_{n=1}^N$ y $\{b_n\}_{n=1}^N$ dos sucesiones finitas de números complejos. Pongamos $B_0 = 0$ y $B_k = \sum_{n=1}^k b_n$ para $k = 1, 2, ..., N$. Demostrar la *fórmula de suma por partes*:

$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) B_n.$$

6. Demostrar el teorema de Abel: si $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge entonces

$$\lim_{r\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Indicación: usar el ejercicio anterior.

7. Determinar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

a) $\sum_{n=1}^\infty (\log n)^2 z^n$;
b) $\sum_{n=1}^\infty n! z^n$;
c) $\sum_{n=1}^\infty \frac{n^2}{4^n + 3n}(z-6)^n$;
d) $\sum_{n=1}^\infty \frac{(n!)^3}{(3n)!} z^n$ (usar la fórmula de Stirling);
e) $\sum_{n=1}^\infty 2^n (z-3i)^n$;
f) $\sum_{n=1}^\infty \frac{n^n}{1+2^n n^n} z^n$;
g) $\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{6} z^n$;
h) $\sum_{n=1}^\infty (2 + (-1)^n)^n z^n$.

8. Sea $f(z) = \sum_{a_n z^n}$ una serie de potencias centrada en el origen. Demostrar que para cada z_0 en su disco de convergencia f tiene una expansión en serie de potencias centrada en z_0.
Indicación: poner $z = z_0 + (z - z_0)$ y usar la fórmula del binomio.

9. ¿Qué funciones representan las siguientes series de potencias: $\sum_{n=1}^\infty n z^n$, $\sum_{n=1}^\infty n^2 z^n$?

10. Demostrar lo siguiente:

a) La serie de potencias $\sum_{n=1}^\infty n z^n$ no converge en ningún punto de la circunferencia unidad $|z| = 1$.
b) La serie de potencias $\sum_{n=1}^\infty z^n/n^2$ converge en todo punto de la circunferencia unidad.
c) La serie de potencias $\sum_{n=1}^\infty z^n/n$ converge en todo punto de la circunferencia unidad, excepto en $z = 1$. Indicación: usar suma por partes.

11. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x > 0$, y $f(x) = 0$ si $x \leq 0$. Demostrar que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, pero f no admite desarrollo en serie de potencias centrado en el origen.

12. Supongamos que f y g son funciones holomorfas en un entorno de 0, y denotemos sus representaciones en series de potencias en un disco D centrado en 0 por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Demostrar que:

a) La representación de $f + g$ en serie de potencias en D es $(f+g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)z^n$.
b) La representación de fg en serie de potencias en D es $(fg)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$, donde

$$c_n = a_n b_0 + a_{n-1}b_1 + ... + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n.$$

13. Si g es holomorfa en un entorno de 0 y $g(0) \neq 0$, hallar la representación en serie de potencias centrada en 0 de $1/g$ en términos de la de g.

14. Calcular las integrales $\int_\gamma f$ en los siguientes casos:

a) $f(z) = 1/z$, y γ la circunferencia unidad, orientada en el sentido contrario a las agujas del reloj (orientación positiva).
b) $f(z) = z/(z^2 + 6)$, y γ el triángulo de vértices 1, i, $-i$, orientado en el sentido de las agujas del reloj (orientación negativa).
c) $f(z) = \overline{z}/(z + 6)$, y γ el rectángulo de vértices $\pm 9 \pm i$, orientado positivamente.

15. Sea γ una curva C^1 a trozos en $\mathbb{C}$, sea $\Gamma \subset \mathbb{C}$ la traza de γ, y sea (f_n) una sucesión de funciones continuas $f_n : \Gamma \to \mathbb{C}$ tales que (f_n) converge uniformemente en Γ a una función f. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n = \int_\gamma f.$$

16. Sean Ω abierto de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua, $\gamma : [a, b] \to \Omega$ de clase C^1, y (γ_n) una sucesión de curvas $\gamma_n : [a, b] \to \Omega$ de clase C^1 tales que $\lim_{n\to\infty} \gamma_n(t) = \gamma(t)$ y $\lim_{n\to\infty} \gamma'_n = \gamma(t)$ uniformemente en $t \in [a, b]$. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} f = \int_\gamma f$.

17. Sea $F : [0, 1] \times \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua, donde Ω es un abierto de $\mathbb{C}$, y sea $\gamma : [a, b] \to \Omega$ una curva de clase C^1 a trozos. Probar que la función $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{C}$ definida por $\varphi(t) = \int_\gamma F(t, z)dz$ es continua.

18. Calcular las siguientes integrales para una curva de clase C^1 a trozos Γ que vaya de $-\pi i$ a πi en el semiplano derecho: $\int_\Gamma z^4 dz$; $\int_\Gamma e^z dz$; $\int_\Gamma \cos z dz$; $\int_\Gamma \operatorname{senh} z dz$.

19. Calcular $\int_C z^n dz$, donde C es cualquier circunferencia centrada en 0 y con orientación positiva.

20. Si $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $f(z) = 1/z$, demostrar que f no tiene ninguna primitiva en Ω.

21. Sean $\Gamma_1, ..., \Gamma_n$ curvas C^1 a trozos tales que el punto final de Γ_j es igual al punto inicial de Γ_{j+1}, y definamos $\Gamma = \Gamma_1 \cup ... \cup \Gamma_n$ (recorrida en el orden natural, es decir, Γ_j antes que Γ_{j+1}). Comprobar que $\int_\Gamma f = \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_j} f$.

22. Demostrar que si $|a| < r < |b|$ entonces

$$\int_{C_r} \frac{1}{(z-a)(z-b)} dz = \frac{2\pi i}{a-b},$$

donde C_r es la circunferencia de radio r centrada en 0, con orientación positiva.

23. Demostrar que dos primitivas de una misma función en un abierto conexo difieren en una constante.