PROBLEMAS DE ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA. HOJA 5.

1. Probar que si f tiene una singularidad aislada en z_0 y $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=0$ entonces la singularidad es evitable.

2. Demostrar que toda función entera f que sea inyectiva es de la forma $f(z)=az+b$, con $a,b\in\mathbb{C}$, $a\neq 0$.

3. Probar que si z_0 es una singularidad aislada de una función holomorfa f y $(z-z_0)^N f(z)$ está acotada cerca de z_0 para algún $N\in\mathbb{N}$ entonces la singularidad o bien es evitable o bien es un polo de orden menor o igual que N.

4. Sea $S=(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de $\mathbb{C}$ que converge a un punto z_0, y sea f una función holomorfa en $D(z_0,r)\setminus(S\cup\{z_0\})$. Demostrar que entonces o bien f puede extenderse a una función meromorfa en $D(z_0,r)$, o bien para todo $w\in\mathbb{C}$ existe $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión convergente a z_0 tal que $f(\xi_n)$ converge a w.

5. Demostrar que si $f(z)$ es una función entera no constante entonces $e^{f(z)}$ tiene una singularidad esencial en ∞.

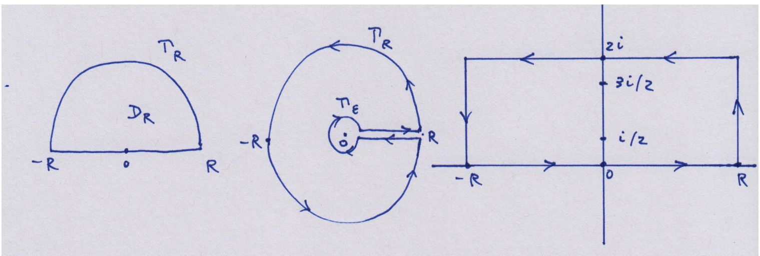
6. Sea f una función holomorfa en un entorno abierto del disco unidad cerrado, excepto en un punto z_0 de la circunferencia unidad en el cual f tiene un polo. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la expansión en serie de potencias de f centrada en 0. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=z_0.$$

7. Si P y Q son polinomios complejos tales que grado(Q) $\geq$ grado$(P)+2$ y Q no tiene ceros en $\mathbb{R}$, demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=2\pi i\sum_{j=1}^{m}\text{Res}\left(\frac{P}{Q},z_j\right),$$

donde $z_1,\ldots,z_m$ son los polos de P/Q en el semiplano superior. Indicación: aplicar el teorema de los residuos en el recinto D_R de la figura y hacer $R\to\infty$.



8. Probar que $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(ax)}{1+x^2}dx=\pi e^{-a}$.

9. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx$.

10. Sean $Q(z)$ un polinomio complejo sin ceros en $\mathbb{R}$, y f una función holomorfa en un abierto que contiene el semiplano superior cerrado. Supongamos que existe $b<m-1$ tal que $|f(z)|\leq |z|^b$ para $|z|>1$. Probar que, si $z_1,\ldots,z_m$ son los ceros de $Q(z)$ en el semiplano superior abierto, se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{Q(x)}dx=2\pi i\sum_{j=1}^{m}\text{Res}\left(\frac{f}{Q},z_j\right).$$

11. Calcular $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos\theta} d\theta$ si $a > 1$. Indicación: usar el teorema de los residuos en el círculo unidad.

12. Demostrar que
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \operatorname{sen}\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$
para todos $a > b > 0$.

13. Demostrar que
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} = \frac{2\pi}{1 - r^2}$$
para todo $0 < r < 1$.

14. Demostrar que
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^{2k}\theta d\theta = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$$
si $k \geq 0$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Indicación: probar primero que
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{w + \cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{w^2 - 1}}$$
para todo $w \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, y luego expandir los dos miembros de esta igualdad en series de potencias centradas en ∞.

15. Demostrar que
$$\int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{(1+x)^2} dx = \frac{\pi\alpha}{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}$$
para $-1 < \alpha < 1$. Indicación: considerar la rama de la función $z^\alpha/(1+z)^2$ definida en $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ por $f(z) = r^\alpha e^{i\alpha\theta}/(1+z)^2$ si $z = re^i\theta$, $0 < \theta < 2\pi$, y usar el teorema de los residuos en uno de los recintos de la figura.

16 (Lema de Jordan)**.** Si Γ_R es la traza de $z(t) = Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, probar que
$$\int_{\Gamma_R} |e^{iz}|\,|dz| < \pi.$$
Indicación: $\operatorname{sen} t \geq 2t/\pi$ si $t \in [0, \pi/2]$.

17. El lema de Jordan puede usarse para calcular mediante el teorema de los residuos integrales del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \operatorname{sen} x dx$ o del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos x dx$, donde P y Q son polinomios con grado(Q) $=$ grado(P) $+ 1$ y Q no tiene ceros en $\mathbb{R}$. Por ejemplo, demostrar que
$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x^3 \operatorname{sen} x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{2e}.$$

18. Probar que
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{\cosh(\pi x)} dx = \frac{1}{\cosh(\pi\xi)}.$$
Indicación: usar el teorema de los residuos en el rectángulo de la figura.

19. Usar el teorema de Rouché para averiguar cuántos ceros tiene el polinomio $P(z) = z^6 + 9z^4 + z^3 + 2z + 4$ dentro del círculo unidad.

20. Demostrar que $2z^5+6z-1$ tiene una raíz en el intervalo $(0, 1)$ y cuatros raíces en el anillo $\{z : 1 < |z| < 2\}$.

21. Probar que para todos $m, n \in \mathbb{N}$, el polinomio
$$P(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + ... + \frac{z^m}{m!} + 3z^n$$
tiene exactamente n raíces en el disco unidad.